

Método de Euler.

14 de junio de 2004

Ejercicio 3.- Para resolverlo hallaremos en primer lugar una tabla de valores de la función $x(t)$ en el intervalo $[0, 1]$; después calcularemos el valor de la función seno en cada uno de esos valores y obtendremos de este modo una tabla de valores de la función compuesta $\text{sen } x(t)$; finalmente, a partir de esta tabla calcularemos un valor *aproximado* de la integral $\int_0^1 \text{sen } x(t) dt$ como la suma de las áreas de rectángulos.

En este ejercicio la ecuación diferencial es $x' = t + x \cos x$, sujeta a la condición inicial $x(0) = 2$. Por tanto, $f(t, x) = t + x \cos x$. Como nos piden hallar una integral entre 0 y 1, tomaremos el intervalo $[a, b] = [0, 1]$; por tanto, $t_0 = a = 0, b = 1$. Por razones de tiempo, en el examen se permite dividir este intervalo en sólo $n = 5$ partes iguales; así pues,

$$h = \frac{1 - 0}{5} = 0,2.$$

Aplicando el método de Euler resulta la tabla siguiente.

k	t_k	x_k	$f(t_k, x_k)$	$f(t_k, x_k)h$
0	0	2	-0.83229	-0.16646
1	0.2	1.8335	-0.27623	-0.055246
2	0.4	1.7783	0.033648	0.0067295
3	0.6	1.785	0.22052	0.044103
4	0.8	1.8291	0.33272	0.066543
5	1	1.8957	0	0

Para hallar la tabla de valores de $\text{sen } x(t)$ calculamos el seno de los valores

de la tercera columna, excepto el último,

$$\begin{aligned} \text{sen } 2,0000 &= 0,9093 \\ \text{sen } 1,8335 &= 0,9657 \\ \text{sen } 1,7783 &= 0,9785 \\ \text{sen } 1,7850 &= 0,9771 \\ \text{sen } 1,8291 &= 0,9668 \end{aligned}$$

De este modo llegamos a que $\int_0^1 \text{sen } x(t) dt$ es *aproximadamente* igual a la suma $0,9093+0,9657+0,9785+0,9771+0,9668$ multiplicada por $0,2$ (longitud del paso); lo cual da

$$\int_0^1 \text{sen } x(t) dt \approx 0,9595.$$

Aquí finalizaría la solución válida para el examen.

Tomando $n = 10$ se obtendría la tabla

k	t_k	x_k	$f(t_k, x_k)$	$f(t_k, x_k)h$
0	0	2	-0.83229	-0.083229
1	0.1	1.9168	-0.55	-0.055
2	0.2	1.8618	-0.33411	-0.033411
3	0.3	1.8284	-0.16573	-0.016573
4	0.4	1.8118	-0.032408	-0.0032408
5	0.5	1.8085	0.074059	0.0074059
6	0.6	1.816	0.15926	0.015926
7	0.7	1.8319	0.22715	0.022715
8	0.8	1.8546	0.28071	0.028071
9	0.9	1.8827	0.32233	0.032233
10	1	1.9149	0	0

Los senos de los valores de la tercera columna, excepto el último, son

$$\begin{bmatrix} 0,9093 \\ 0,94075 \\ 0,95796 \\ 0,96701 \\ 0,9711 \\ 0,97187 \\ 0,9701 \\ 0,96611 \\ 0,96 \\ 0,95176 \end{bmatrix}$$

Si sumamos estos 10 números y multiplicamos la suma por 0,1 (longitud del paso), obtenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x(t) dt \approx 0,9566,$$

que es una aproximación mejor.

Con $n = 100$, obtenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x(t) dt \approx 0,9531,$$

que es un resultado más fino. Obviamos la transcripción de los datos de estos cálculos.

Estos cálculos pueden hacerse fácilmente con muchos programas de ordenador. En concreto, se ha utilizado MATLAB. Con todo, el objetivo en esta asignatura es que el alumno haga los cálculos a mano con ayuda de una calculadora simple.