Cálculo y álgebra

1º de Ciencias Ambientales, 26 de enero de 2004, examen.

Ejercicio 1.- Encontrar el máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

Ejercicio 2.- Sea $G(t)$ una función derivable de una variable real t. Se pide encontrar $G(t)$ para que el campo vectorial

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) := G(x^2+y)\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{x^3}{3} + xy + y^3\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

sea un gradiente. Después hallar una función $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = \vec{\boldsymbol{F}}(x,y)$ y $f(1,1) = 4$.

Ejercicio 3.- (2'5 puntos) Hallar los planos tangentes al elipsoide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

que pasan por la recta

$$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 2+2t, \\ z = 2-t. \end{cases}$$

Ejercicio 4.- (2'5 puntos)

Sea $f(x,y)$ una función diferenciable. La figura 1 representa una curva de nivel, $f(x,y)=c$, que se corta a sí misma en el punto (x_0,y_0). Demostrar que (x_0,y_0) es un punto crítico de $f(x,y)$.

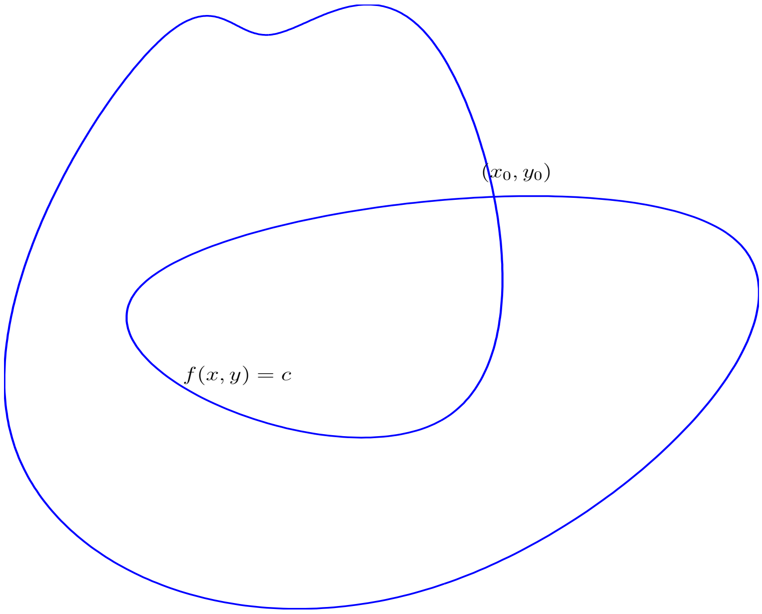

Figura 1: Curva de nivel de $f(x,y)$.