Ampliación de Matemáticas

1º de Ciencias Ambientales, 20 de junio de 2005, examen.

Ejercicio 1.- Sea $\big(x(t), y(t)\big)$ la trayectoria del sistema de Volterra-Lotka

$$\begin{cases} x' = x(3-4y), \\ y' = y(2x-1), \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 0.2$, $y(0) = 0.4$. Observemos la Figura 1 en la que se ve que el punto (0.2,0.4) está en la zona I. Utilizando el método de Euler hallar **aproximadamente** un valor $T > 0$ tal que el punto $\big(x(T), y(T)\big)$ esté en la zona II.

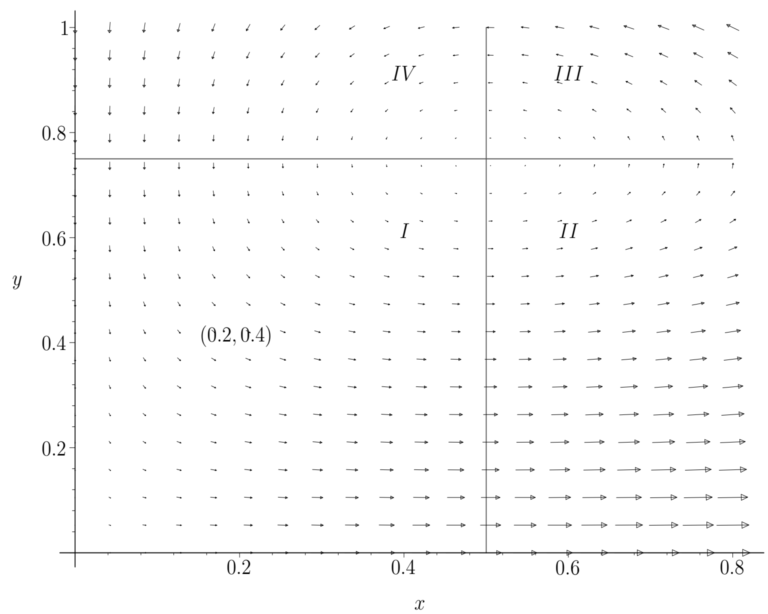

Figura 1: Sistema de Volterra-Lotka.

Ejercicio 2.- En las Figuras 2 y 3 se muestran dos curvas de nivel de una función $f(x, y)$ (líneas continuas ——), una curva de nivel de una función $g(x, y)$ (línea de trazos – – –) y el campo vectorial de direcciones del sistema diferencial autónomo

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Una figura es errónea. Decir cuál es y por qué.

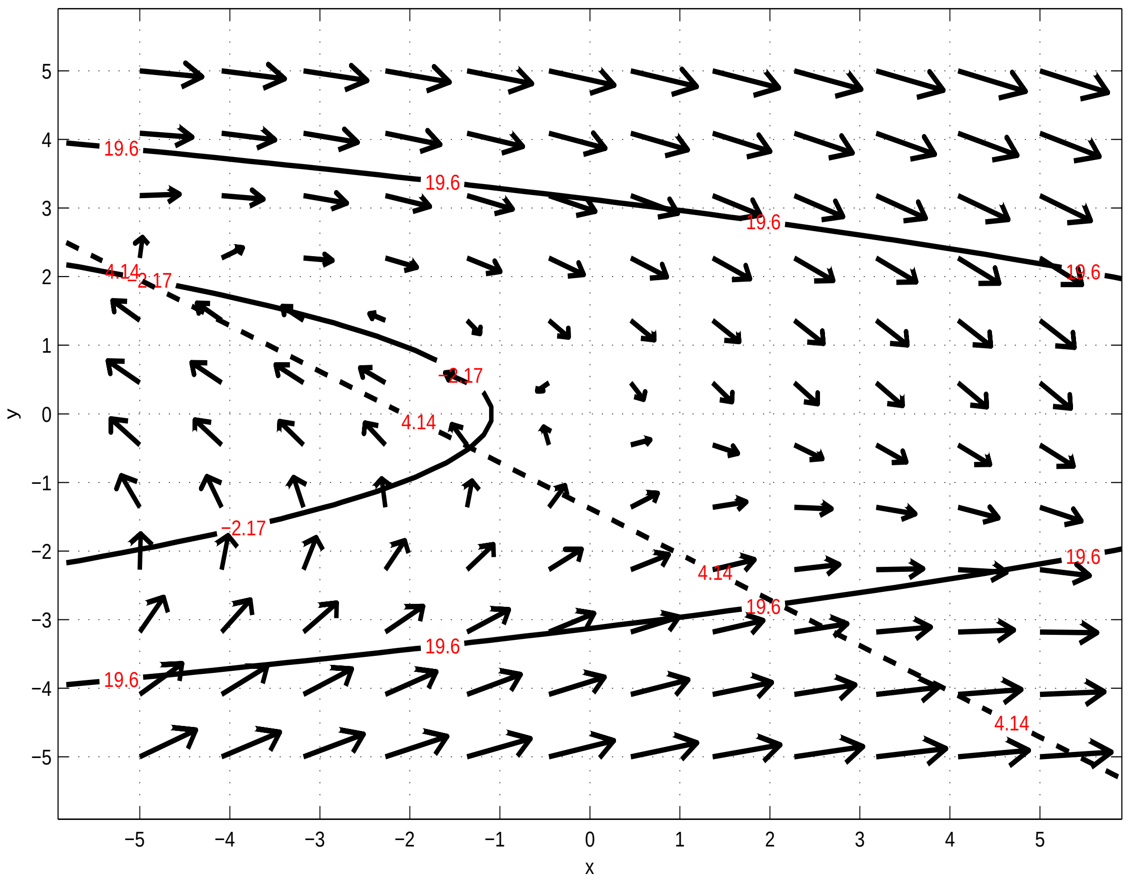

Figura 2: $f(x, y) = 19{,}6$; $f(x, y) = -2{,}17$; $g(x, y) = 4{,}14$.

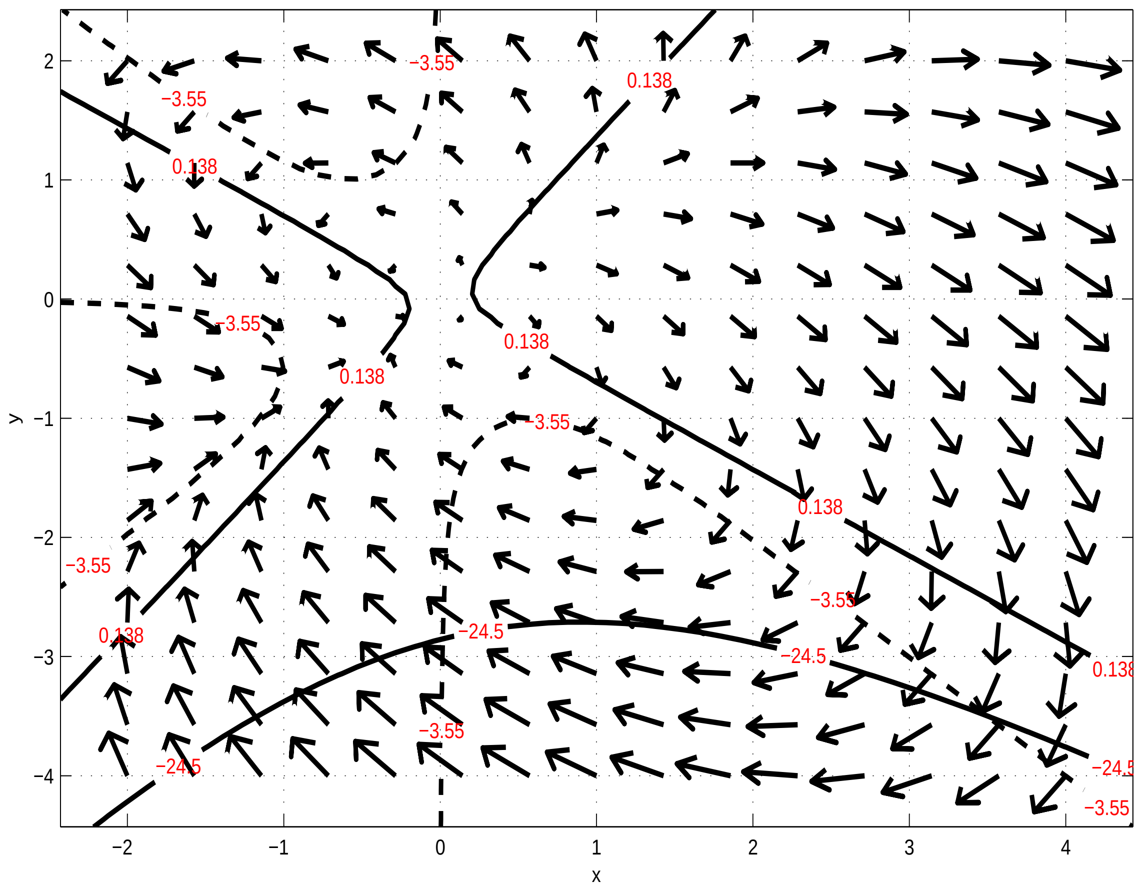

Figura 3: $f(x, y) = 0{,}138$; $f(x, y) = -24{,}5$; $g(x, y) = -3{,}55$.

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Demostrar que las curvas de nivel de la función

$$H(x, y) = 3x - 2\ln x + y - 4\ln y$$

dentro del primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) son curvas cerradas simples, visibles desde el punto $(2/3, 4)$.

Ejercicio 4.- (2'5 puntos) Hallar las dos funciones $x(t)$ que son solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \sqrt{x(1) + 1}, \\ x(0) = x(1). \end{cases}$$

Indicación.- Llamar $m := x(1)$; después resolver la ecuación diferencial lineal $x'(t) = x(t) + \sqrt{m + 1}$, junto con la condición inicial $x(0) = m$; finalmente hallar m, ...

Nota.- Por razones de equidad se pide que no hagan preguntas.

Tiempo: 4 horas.