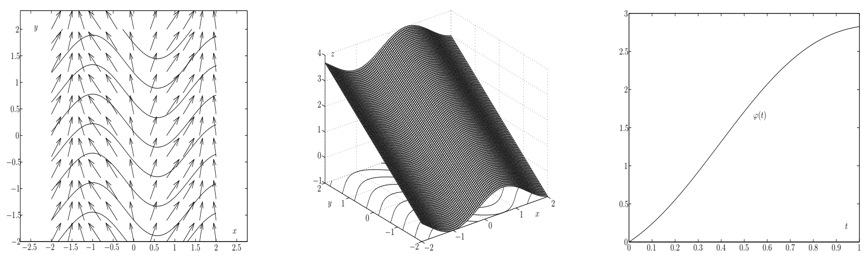
Cálculo y Álgebra

1º de Ciencias Ambientales, 31 de enero de 2005, examen.

Ejercicio 1.- Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto $(1,3)$, de la que sabemos que $f(1,3) = -8$, $f(0'99, 3'002) = -7'9456$, $f(1'004, 3'001) = -8'0270$. Hallar aproximadamente

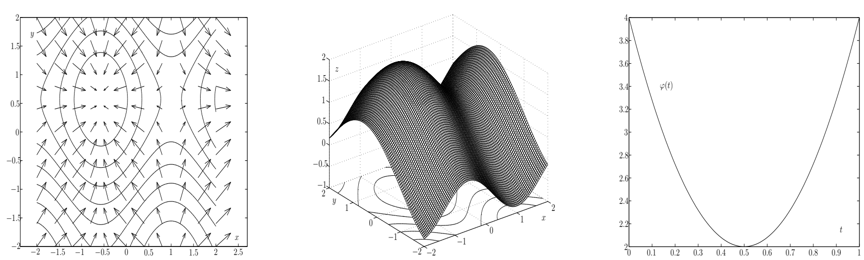
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(1,3).$$

Ejercicio 2.- Para tres funciones $f(x,y)$ sobre el cuadrado dado por $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ cada una de las Figuras 1, 2, y 3 representan el mapa de las curvas de nivel $f(x,y) = c$, el campo de gradientes $\nabla f(x,y)$, la superficie $z = f(x,y)$ y la gráfica de la función auxiliar $\varphi(t) := f(-1+2t, -1+2t)$. Detectar los fallos, si los hubiera.



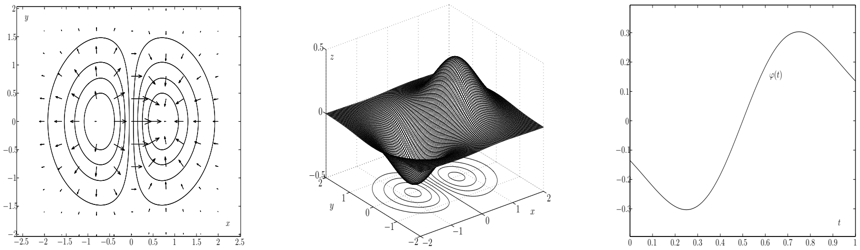
(a) (b) (c)

Figura 1: Curvas de nivel, campo de gradientes, superficie y función auxiliar



(a) (b) (c)

Figura 2: Curvas de nivel, campo de gradientes, superficie y función auxiliar



(a) (b) (c)

Figura 3: Curvas de nivel, campo de gradientes, superficie y función auxiliar

Ejercicio 3.- (2'5 puntos) Sean los puntos del plano $P_1 = (-6, 0)$ y $P_2 = (6, 0)$. Para cada punto (x, y) sean $r_1(x, y)$ y $r_2(x, y)$ las distancias de $Q = (x, y)$ a P_1 y P_2, respectivamente. Por definición, el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que

$$r_1(x, y) + r_2(x, y) = 20 \tag{1}$$

es una elipse de focos P_1 y P_2. Sea $f(x, y)$ la función

$$f(x, y) := r_1(x, y) + r_2(x, y).$$

Es claro que la elipse (1) es la curva de nivel $f(x, y) = 20$ de la función $f(x, y)$.

Se pide:

(1) Demostrar que $\nabla f(x, y) = \nabla r_1(x, y) + \nabla r_2(x, y)$.

(2) Demostrar que

$$\nabla r_1(x, y) = \frac{\overrightarrow{P_1Q}}{\|\overrightarrow{P_1Q}\|},$$

$$\nabla r_2(x, y) = \frac{\overrightarrow{P_2Q}}{\|\overrightarrow{P_2Q}\|}.$$

(3) Si ahora $Q = (x_0, y_0)$ es un punto de la elipse (1) y $\vec{\boldsymbol{u}}$ es un vector unitario tangente a la elipse en Q, demostrar que

$$\nabla r_1(x_0, y_0) \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \nabla r_2(x_0, y_0) \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = 0$$

(4) Si α y β son los ángulos que forman los segmentos $\overline{P_1Q}$ y $\overline{P_2Q}$ con la recta tangente a la elipse en Q, demostrar que $\alpha = \beta$. Véase la Figura 4.

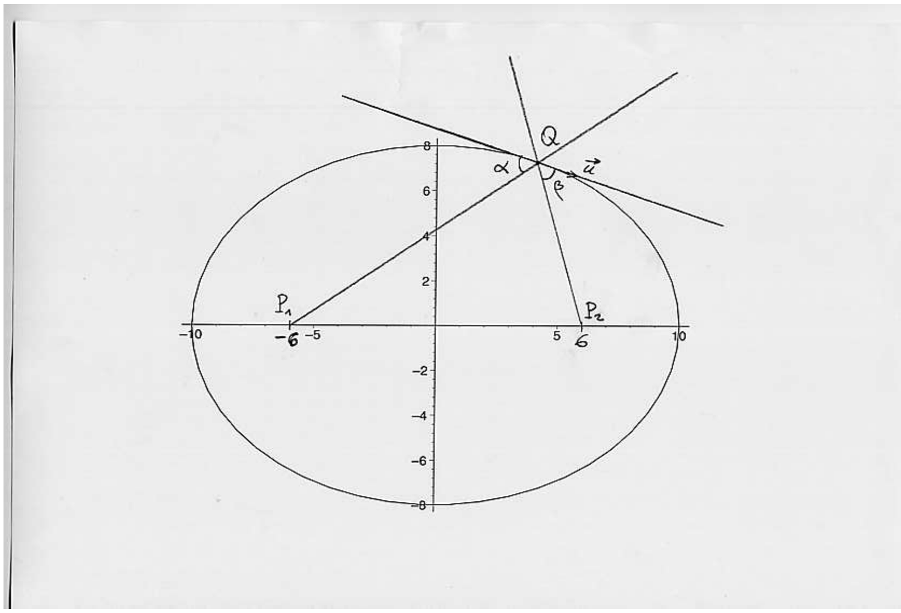


Figura 4: Elipse

Ejercicio 4.- (2'5 puntos) Comprobar que la función

$$f(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

tiene 5 puntos críticos. Averiguar cuáles son máximos, mínimos y puntos de silla.

Indicación.- Si en un punto crítico (x_0, y_0, z_0) la matriz hessiana no sirve para decidir su naturaleza, estudiar la cuestión mediante las funciones auxiliares

$$\varphi(t) := f(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

para diversos vectores (a, b, c).

Tiempo: 4 horas.

Por razones de equidad se ruega que no hagan preguntas en el examen.