Cálculo y Álgebra

1º de Ciencias Ambientales, 14 de septiembre de 2005, examen. Tiempo: 4 horas. Por razones de equidad se ruega que no hagan preguntas en el examen.

Ejercicio 1.- Hallar las rectas tangentes a la curva $x^2 + xy + y^2 = 3/2$ que pasan por el punto $(1, 1)$.

Respuestas.- $(3 + \sqrt{3})x + (3 - \sqrt{3})y = 6$; $(3 - \sqrt{3})x + (3 + \sqrt{3})y = 6$. Véase la Figura 1

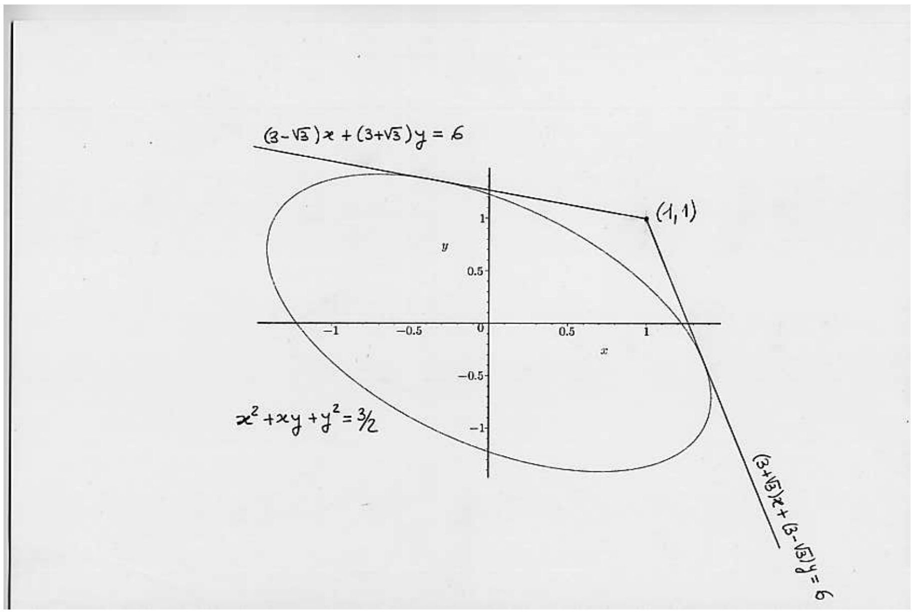

Figura 1: Dos rectas tangentes.

Ejercicio 2.- Sea la función

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Probar que no existe la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

¿En qué puntos es diferenciable la función $f(x, y)$?

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Denotamos por $\max(x, y)$ el mayor de los números reales x e y. Demostrar que la función $f(x, y) := \max(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si y sólo si $x_0 \neq y_0$.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de silla de las funciones:

1. $f(x, y) := (x^2 - 30y^2)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$;

2. $g(x, y) := \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$;

3. $h(x, y) := \dfrac{x^2 - y^2}{3 + x^2 + y^2}$.

Como ayuda se dan las gráficas de estas funciones sobre el cuadrado $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, en otro orden.