

Cálculo y Álgebra

1º de Ciencias Ambientales, Grupo 16, 2 de febrero de 2006, examen.

Ejercicio 1.- Sea la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$$

¿Para qué valores de c es no vacía la curva de nivel $f(x, y) = c$? Demostrar que para esos valores de c , excepto para $c = 0$, la curva $f(x, y) = c$ es una circunferencia; hallar su centro y su radio en función de c . ¿Qué clase de línea es la curva $f(x, y) = 0$?

Ejercicio 2.-

Sea $f(x, y)$ una función tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 6x)\vec{i} + (6xy - 6y)\vec{j}, \\ f(-3, 4) = 10. \end{cases}$$

Hallar los puntos críticos de $f(x, y)$ y averiguar su naturaleza (máximo relativo, mínimo relativo, punto de ensilladura). Hallar el valor de $f(x, y)$ en sus máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 3.- (2'5 puntos)

¿En qué puntos es diferenciable la función $f(x, y) = |xy|$? Razónese.

Ejercicio 4.- (2'5 puntos)

Sean $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ tres funciones para las que existen las derivadas parciales primeras y son iguales a los valores indicados:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(2, 2) = 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(2, 2) = 3, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(2, 2) = 4, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(2, 2) = -1.$$

Las Figuras 1, 2 y 3, que están detrás, muestran las gráficas de las funciones auxiliares

$$\varphi_1(t) := f(2 + 3t, 2 + t), \quad \varphi_2(t) := g(2 + 2t, 2 - t), \quad \varphi_3(t) := h(2 + t, 2 + 4t).$$

Dos de las funciones $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ no pueden ser diferenciables en $(2, 2)$. ¿Cuáles son? Razónese.

Tiempo: 4 horas.

Por razones de equidad se ruega que no hagan preguntas en el examen.

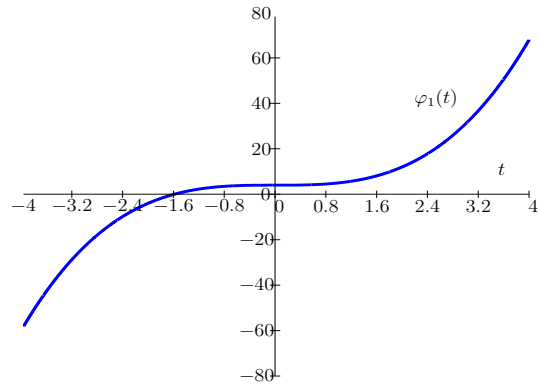


Figura 1: Gráfica de $\varphi_1(t)$

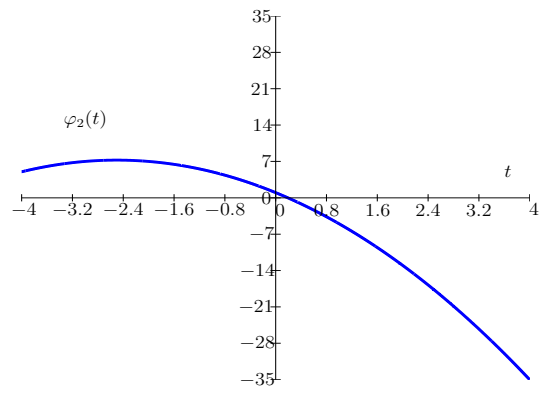


Figura 2: Gráfica de $\varphi_2(t)$

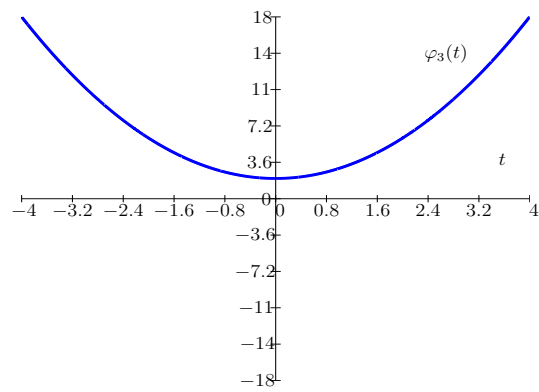


Figura 3: Gráfica de $\varphi_3(t)$