Ampliación de Matemáticas

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 11 de junio de 2007, examen.

Ejercicio 1.- Dada la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{t} + \frac{1}{t}$$

hallar la solución que satisface $x(1) = 2$.

Ejercicio 2.- Sea $x(t)$ la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' = -(t^2 + 1)\cos x \\ x(0) = 1, x'(0) = 1. \end{cases}$$

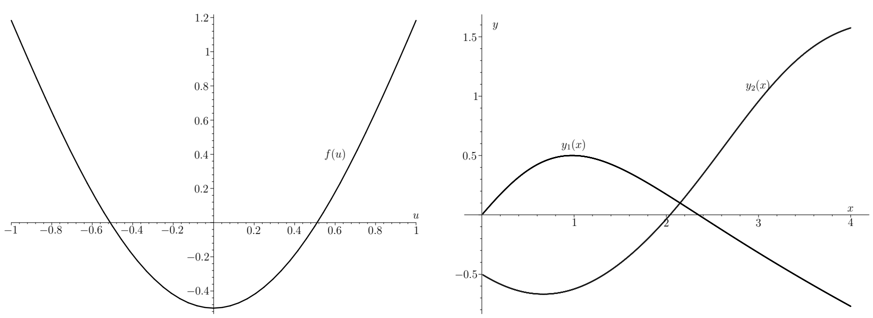
Hallar aproximadamente

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{x(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Se considera una función $f(u)$ definida en el intervalo $-1 \leq u \leq 1$ cuya gráfica viene dada en la Figura 1(a). Una de las dos funciones $y_1(x), y_2(x)$ representadas sobre el intervalo $0{,}01 \leq x \leq 4$ y dadas por la Figura 1(b) no puede ser solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

¿Cuál es? Razónese.



(a) $f(u)$. (b) $y_1(x), y_2(x)$.

Figura 1: Datos gráficos del Ejercicio 3.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos)

(a) Calcular los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Consideremos la sucesión de puntos $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ del plano definida por las relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} x_{k+1} = -7x_k - 6y_k, \\ y_{k+1} = 12x_k + 10y_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

entre las coordenadas del punto P_k y las de P_{k+1}, así como por el punto inicial P_0.

- Demostrar que, cualquiera que sea P_0, los puntos

  $$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots$$

  están alineados.

- Llamemos $R(P_0)$ a la recta que contiene los puntos

  $$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots$$

  Sea $P_0' = (x_0', y_0')$ cualquier otro punto inicial y denotemos por $R(P_0')$ a la recta que contiene los puntos

  $$P_0', P_1', P_2', \ldots, P_k', P_{k+1}', \ldots$$

  donde $P_k' = (x_k', y_k')$ y $P_{k+1}' = (x_{k+1}', y_{k+1}')$ están ligados por las relaciones de recurrencia

  $$\begin{cases} x_{k+1}' = -7x_k' - 6y_k', \\ y_{k+1}' = 12x_k' + 10y_k', \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  Demostrar que las rectas $R(P_0)$ y $R(P_0')$ son paralelas.

Nota.- Por razones de equidad se ruega que no hagan preguntas durante el examen.