Ampliación de Matemáticas

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 10 de septiembre de 2007, examen.

Ejercicio 1.- Dada la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = tx - t^3,$$

Hallar la solución que satisface $x(0) = 5$.

Respuesta.-

$$x(t) = 2 + t^2 + 3\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.$$

Ejercicio 2.- Hallar la solución

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

del sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = -10x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 10x_1 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x_1(0) = -2, x_2(0) = 3, x_3(0) = 2$.

Respuesta.-

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\,\mathrm{e}^{3t} + 5\,\mathrm{e}^{t} \\ 14\,\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-2t} - 10\,\mathrm{e}^{t} \\ -14\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-2t} + 15\,\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Decir si las tres funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ representadas gráficamente en la Figura 1 son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$.

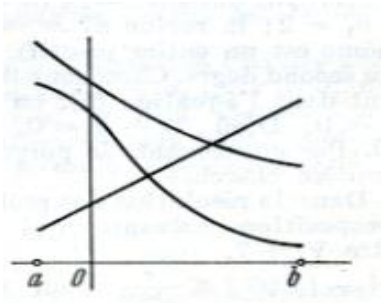

Figura 1: Funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos)

(a) Calcular los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -10 & 2 & 4 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Consideremos la sucesión de puntos $P_k = (x_k, y_k, z_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ del espacio definida por las relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k - 2y_k - 2z_k, \\ y_{k+1} = -10x_k + 2y_k + 4z_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ z_{k+1} = 10x_k - y_k - 3z_k \end{cases}$$

entre las coordenadas del punto P_k y las de P_{k+1}, así como por el punto inicial P_0.

- Demostrar que, cualquiera que sea P_0, los puntos

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots$$

son coplanarios (es decir, que están en un mismo plano).

- Llamemos $\pi(P_0)$ al plano que contiene los puntos

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots$$

Sea $P_0' = (x_0', y_0', z_0')$ cualquier otro punto inicial y denotemos por $\pi(P_0')$ al plano que contiene los puntos

$$P_0', P_1', P_2', \ldots, P_k', P_{k+1}', \ldots$$

donde $P_k' = (x_k', y_k', z_k')$ y $P_{k+1}' = (x_{k+1}', y_{k+1}', z_{k+1}')$ están ligados por las relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} x_{k+1}' = 3x_k' - 2y_k' - 2z_k', \\ y_{k+1}' = -10x_k' + 2y_k' + 4z_k', \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ z_{k+1}' = 10x_k' - y_k' - 3z_k' \end{cases}$$

Demostrar que los planos $\pi(P_0)$ y $\pi(P_0')$ son paralelos.

Duración: 4 horas.