Cálculo y Álgebra. Curso 2006–2007

Grupo 16 de 1^o de Ciencias Ambientales,
5 de febrero de 2007, examen.

Ejercicio 1.- Dado el punto $P = \bigl(1, 3, 3 + \sqrt{2}\bigr)$ que está situado en la esfera $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$, hallar el punto antípoda de P. Se llama punto antípoda de P al punto situado en la esfera que más dista de P.

Ejercicio 2.- Si los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ son perpendiculares tales que $2\|\vec{\boldsymbol{b}}\| > 3\|\vec{\boldsymbol{a}}\|$, hallar los valores reales de x tales que

$$\|3\vec{\boldsymbol{a}} + x\vec{\boldsymbol{b}}\| \leq \|x\vec{\boldsymbol{a}} - 2\vec{\boldsymbol{b}}\|.$$

Indicación.- Como ayuda se da la respuesta:

$$|x| \leq \sqrt{\frac{4\|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2 - 9\|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2}{\|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2 - \|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2}}.$$

Ejercicio 3.-(2,5 puntos) Se consideran cinco funciones $f(x, y)$ diferenciables en $(2, 3)$. Se definen las funciones correspondientes

$$\varphi(t) := f\bigl(2 + t/\sqrt{2}, 3 + t/\sqrt{2}\bigr).$$

En la Figura 1 están representadas las funciones auxiliares $\varphi(t)$ en un entorno de $t = 0$. En la Figura 2 aparecen el vector $\vec{\boldsymbol{u}} = \bigl(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\bigr)$ y los vectores gradientes $\nabla f(2, 3)$ para las diversas funciones $f(x, y)$; todos los vectores han sido colocados con origen en el punto $(2, 3)$. Se pide emparejar cada curva de la Figura 1 con el vector gradiente que le corresponde en la Figura 2. Razónese.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Sea $f(x, y)$ la función tal que

$$\nabla f(x, y) = (x^3 + 3y^2 - 6x, 6xy - 6y) \qquad (1)$$

y $f(0, 0) = 6$. Hallar los cinco puntos críticos de $f(x, y)$ y averiguar su naturaleza (máximo relativo, mínimo relativo, punto de ensilladura) mediante la matriz hessiana. Hallar el valor de $f(x, y)$ en los puntos de ensilladura.

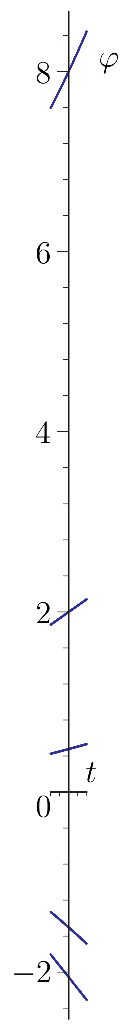

Figura 1: Funciones auxiliares $\varphi(t)$.

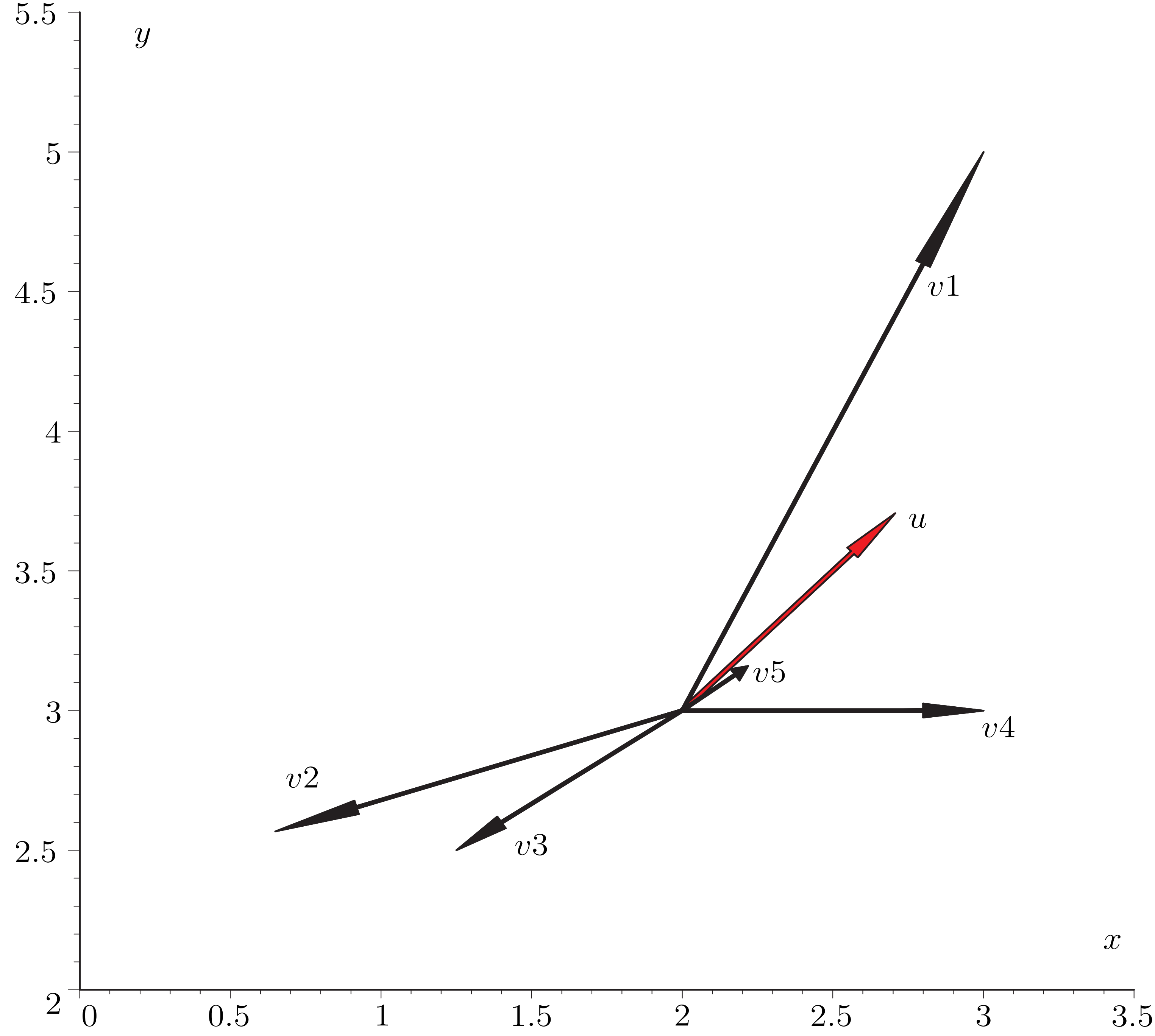

Figura 2: Gradientes $\nabla f(2,3)$.