

Soluciones abreviadas del exámen de Cálculo y  
Álgebra del día 3 de septiembre de 2007.  
Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales

Juan-Miguel Gracia\*

9 de septiembre de 2007

**Ejercicio 2**

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{b} = (1, -1, 2) \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 3, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 4 = 6, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1 - 1 + 2 = 2.$$

$$\|3\mathbf{a} + x\mathbf{b}\| \leq \|x\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\| \quad (1)$$

$\Updownarrow$

$$\|3\mathbf{a} + x\mathbf{b}\|^2 \leq \|x\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\|^2$$

$$(3\mathbf{a} + x\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + x\mathbf{b}) \leq (x\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (x\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$$

$$9\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 3x\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 3x\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + x^2\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \leq x^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2x\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2x\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$$9\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 6x\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + x^2\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \leq x^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4x\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$$27 + 12x + 6x^2 \leq 3x^2 - 8x + 24$$

$$3x^2 + 20x + 3 \leq 0.$$

Representemos la función  $y(x) := 3x^2 + 20x + 3$ . Los puntos de corte con el eje  $x$  son las raíces de la ecuación  $3x^2 + 20x + 3 = 0$ :

$$x_1 = \frac{-\sqrt{91} - 10}{3} = -6,5131, \quad x_2 = \frac{\sqrt{91} - 10}{3} = -0,1535.$$

Como  $y(-2) = -25 < 0$ , se deduce que para todo  $x : -6,5131 \leq x \leq -0,1535$  se tiene que  $y(x) \leq 0$ ; es decir, para estos valores de  $x$  se satisface la desigualdad (1).

---

\*Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad del País Vasco, Facultad de Farmacia, Paseo de la Universidad, 7, ES-01006 Vitoria-Gasteiz, Spain, [juanmiguel.gracia@ehu.es](mailto:juanmiguel.gracia@ehu.es)

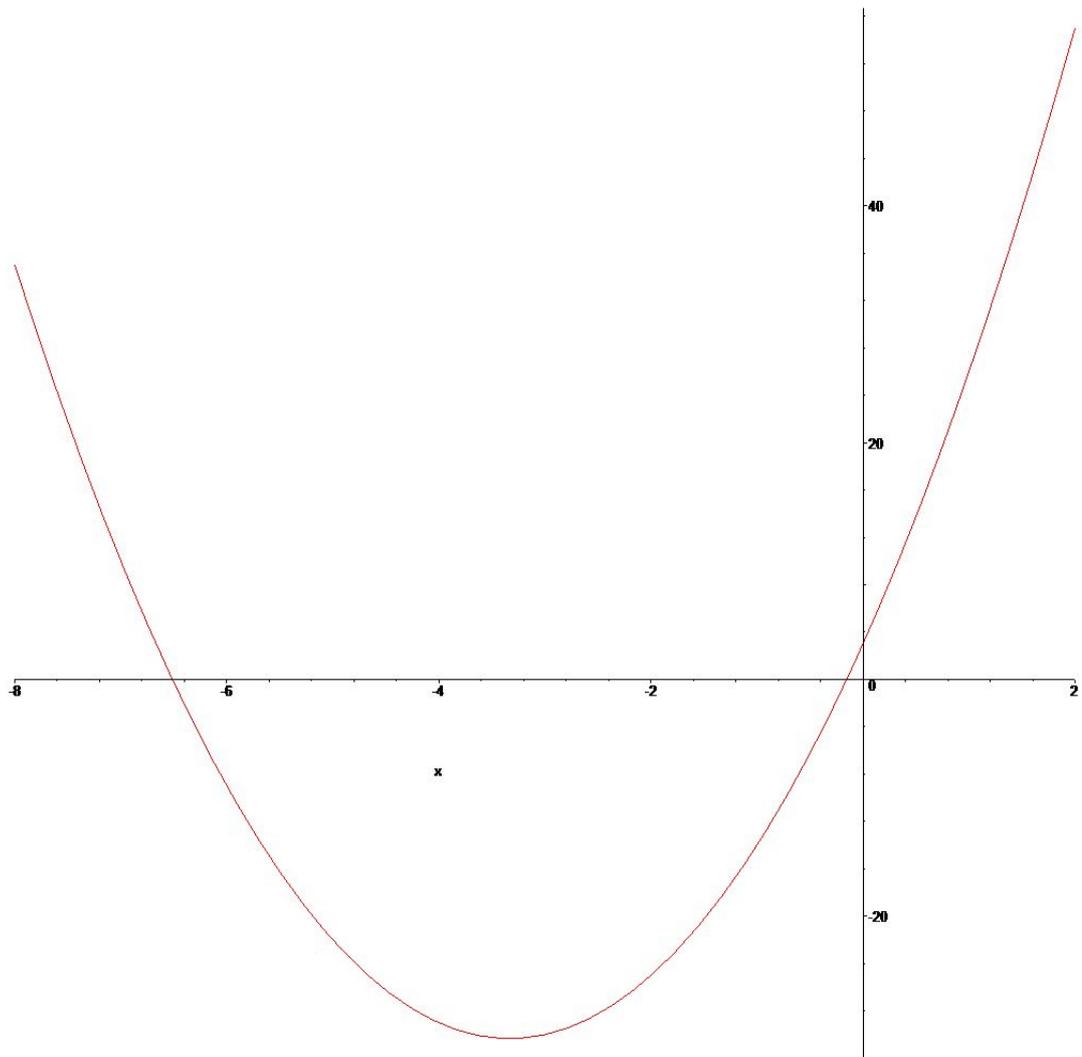


Figura 1:  $y(x) = 3x^2 + 20x + 3$ . **Fin**