Soluciones abreviadas del exámen de Cálculo y Álgebra del día 3 de septiembre de 2007. Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales

Juan-Miguel Gracia*

9 de septiembre de 2007

Ejercicio 3

Sea $f(x, y) := |xy|$. Entonces existen las derivadas parciales de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ y son iguales a cero. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h\cdot 0| - |0\cdot 0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) := \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|0\cdot k| - |0\cdot 0|}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

Por la Definición 2 de función diferenciable, si probamos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

quedará demostrado que $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$. Así pues, vamos a demostrar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ahora bien,

$$0 \le \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|hk|}{\sqrt{h^2}} = \frac{|hk|}{|h|} = |k|;$$

como $|k| \to 0$ cuando $(h, k) \to (0, 0)$, de las desigualdades últimas se deduce que

$$\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \to (0,0) \quad \text{cuando } (h,k)\to(0,0).$$

□

*Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad del País Vasco, Facultad de Farmacia, Paseo de la Universidad, 7, ES-01006 Vitoria-Gasteiz, Spain, juanmiguel.gracia@ehu.es