

Cálculo y Álgebra. Curso 2007–2008

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales,

7 de febrero de 2008, examen.

Ejercicio 1.- Se considera la esfera

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

de centro $\mathbf{C} = (1, -1, 2)$ y radio 3. Sea el punto dado $\mathbf{P} = (2, 3, 4)$. Hallar la ecuación del plano que contiene a todos los puntos $\mathbf{Q}$ de la esfera tales que el ángulo que formen los vectores $\overrightarrow{\mathbf{CQ}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{CP}}$ sea igual a $\pi/3$ radianes.

Ejercicio 2.- Comprobar que todos los límites direccionales asociados al límite doble

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^3}{y^2 + x^6} \quad (1)$$

son iguales a 0. Después razonar por qué no existe el límite doble.

Ejercicio 3.- Para cada una de las tres funciones

(a) $f(x, y) := x^2 + 3xy^2$,

(b) $f(x, y) := 3xy + 5x - y$,

(c) $f(x, y) := (x + y)^2 + 10x - 4y$,

se han representado sus gradientes $\nabla f(x, y)$ en todo punto de coordenadas enteras situado en el rectángulo: $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$.

Emparejar cada función con la figura que le corresponda. Dar razones.

NOTA.- En realidad se han multiplicado los vectores $\nabla f(x, y)$ por el factor de escala 1/20 a fin de poder incluirlos en las figuras.

Ejercicio 4.- Dada la función

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Probar que $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = -1$.
- Demostrar que la función $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

TIEMPO: 4 horas.

Por razones de equidad se ruega que no hagan preguntas en el examen.

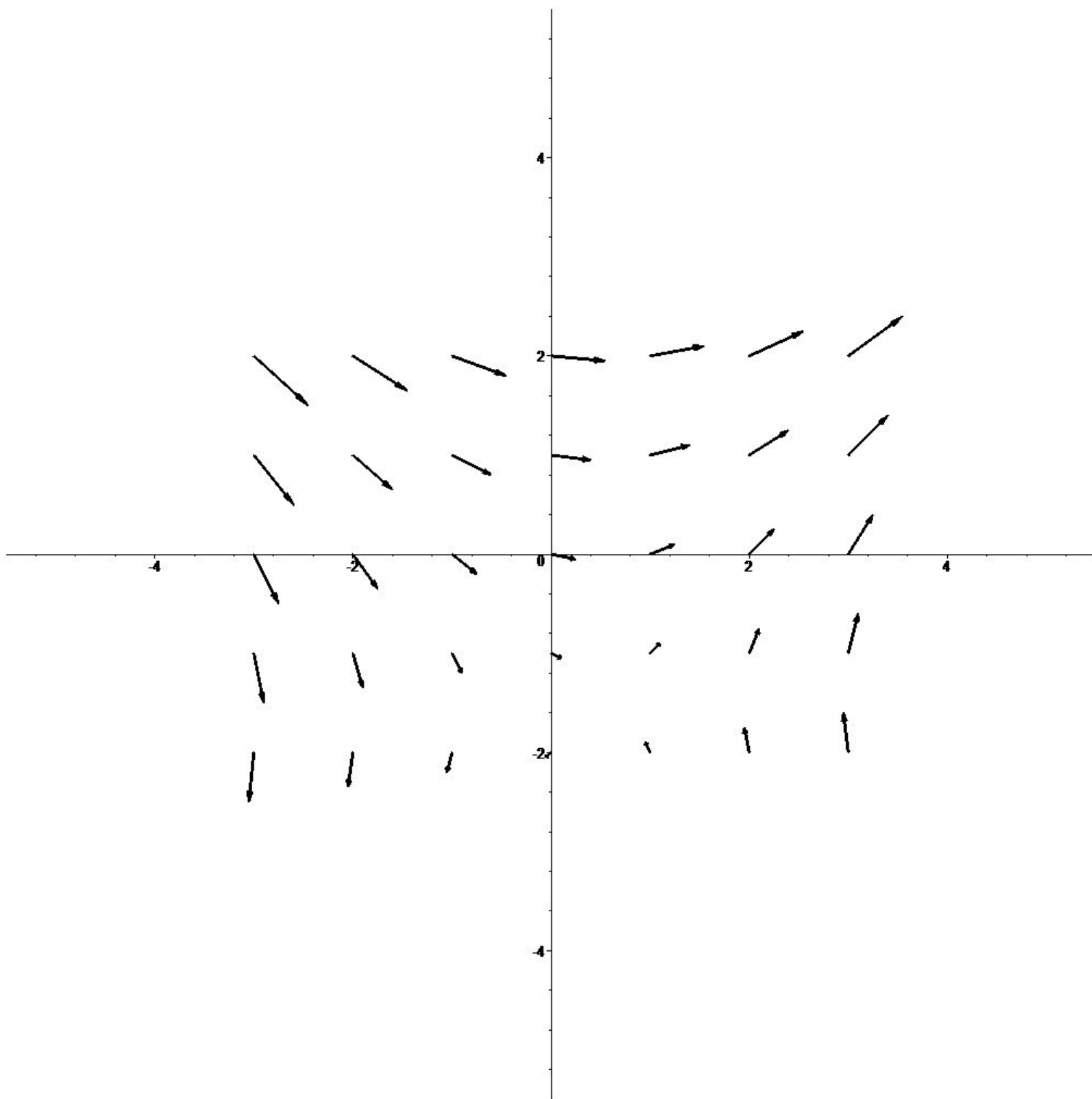


Figura 1: Gradientes $\nabla f(x, y)$.

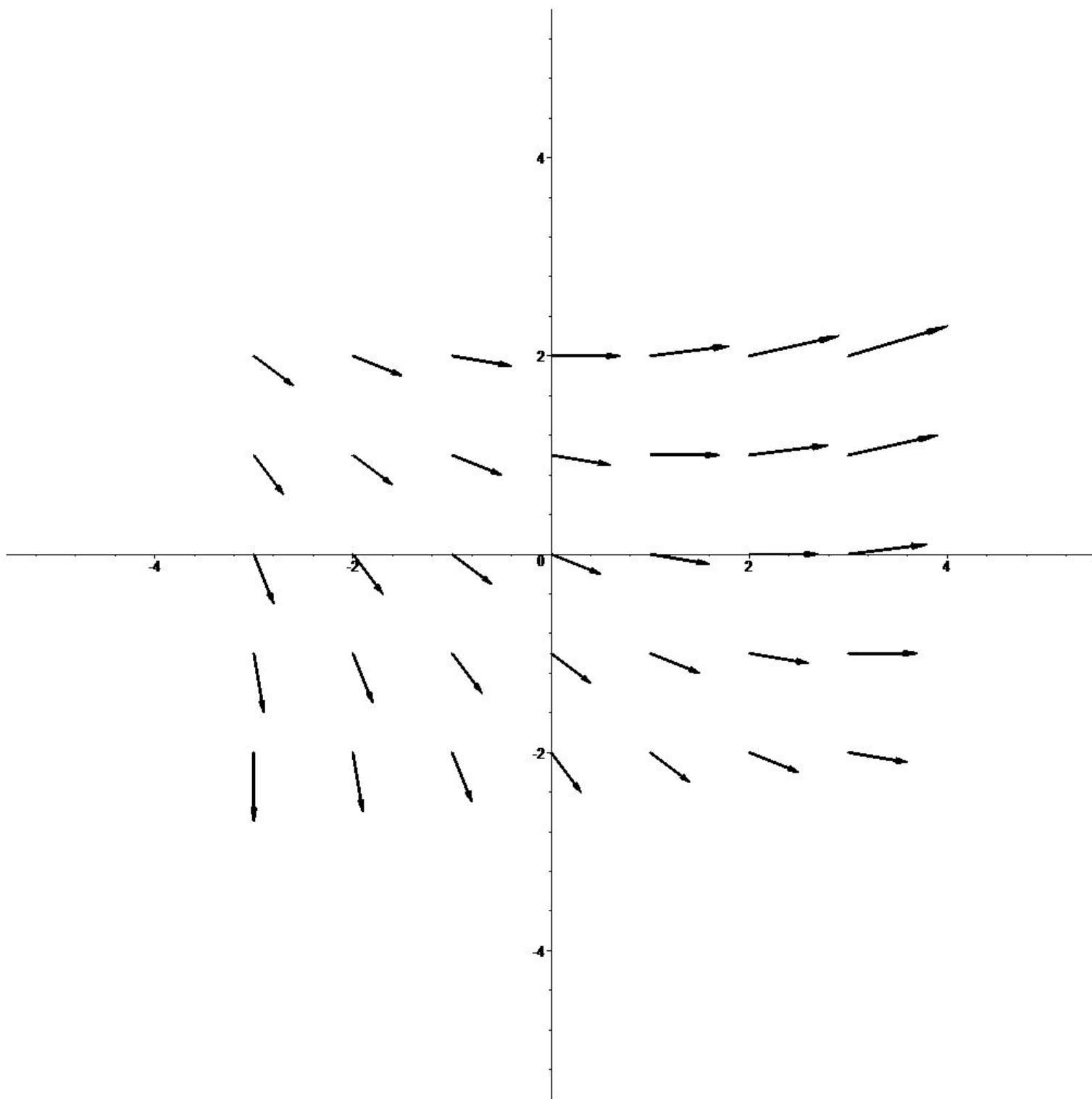


Figura 2: Gradientes $\nabla f(x, y)$.

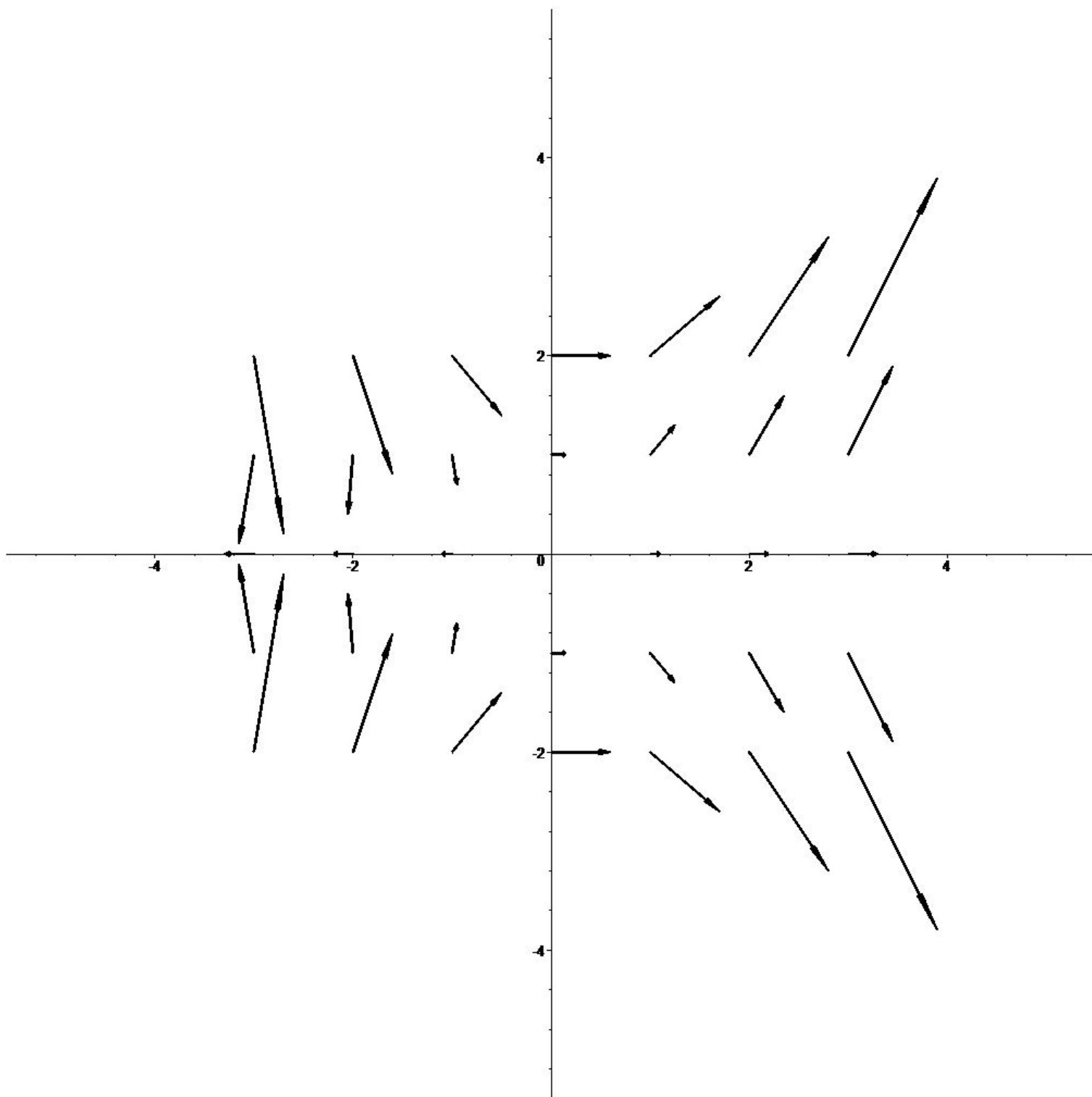


Figura 3: Gradientes $\nabla f(x, y)$.