Ampliación de Matemáticas

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 16 de junio de 2009, examen.
Puntuación total: 10. Cada ejercicio vale 2,5 puntos.

Ejercicio 1.- Sabiendo que las funciones $u(t) = t$ y $v(t) = \operatorname{sen} t$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$, determinar el menor valor posible de n.

Ejercicio 2.- ¿Cuál de las funciones $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ de la figura de la izquierda no es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x + y - 2)$$

siendo $f(z)$ la función representada en la figura de la derecha?

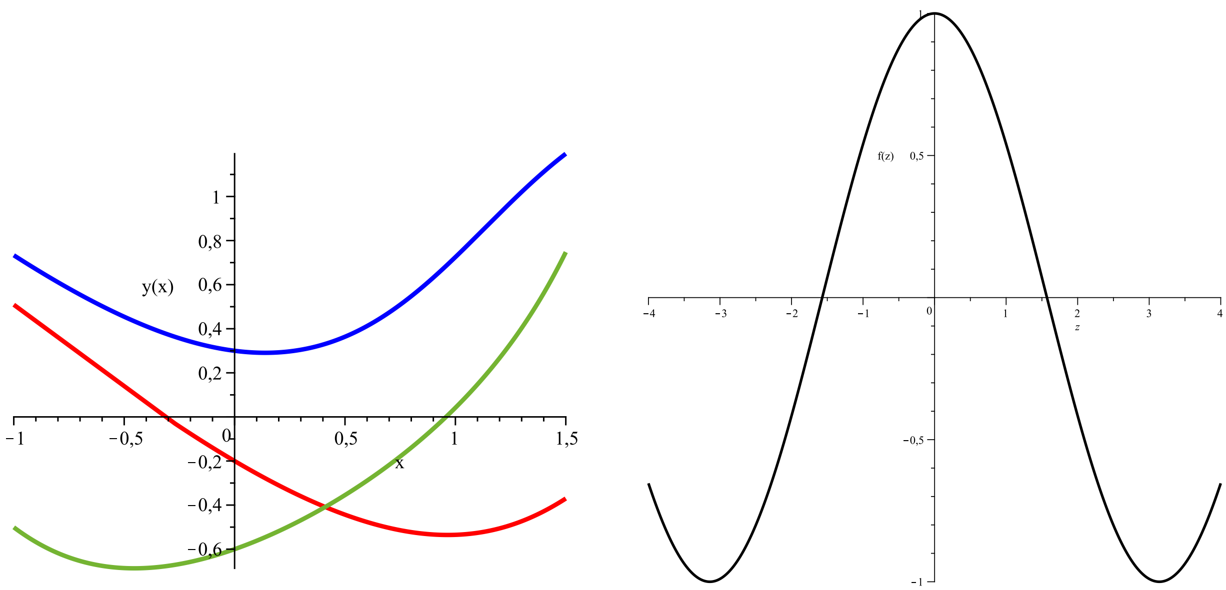

Figura 1: Ejercicio 2.

Ejercicio 3.- Sea $P(t)$ el número de millones de habitantes de un país al cabo de t años de comenzar los censos. Sea $P(0) = 1$ millón. Suponiendo que el crecimiento de la población venga modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}20P - 0{,}01P^2 \qquad \text{(modelo logístico)},$$

hallar la función $P(t)$ y su punto de inflexión.

En la Figura 2 están representadas en color azul la función $P(t)$ y en color rojo la función $Q(t)$ solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0{,}20Q \qquad \text{(modelo maltusiano)}, \\ Q(0) = 1. \end{cases}$$

Dar alguna razón matemática de la proximidad de estas curvas en el intervalo $0 \leq t \leq 10$.

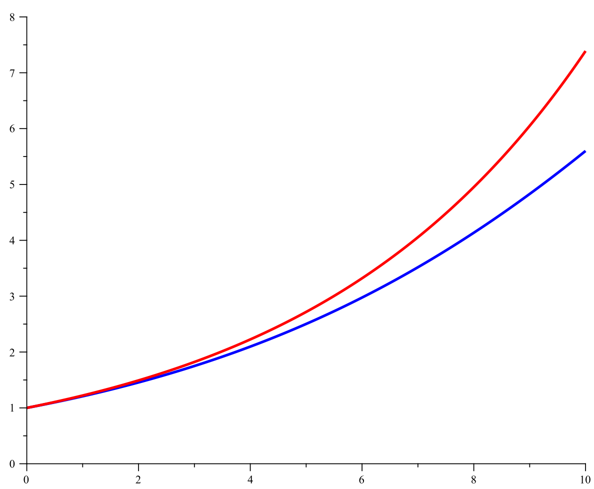

Figura 2: Ejercicio 3: curvas maltusiana y logística.

Ejercicio 4.- Demostrar que la única solución común a las dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'' - 3x' - 4x &= 0, \\ x' &= 5x, \end{aligned}$$

es la función $x(t) = 0$ para todo número real t.