Cálculo y Álgebra. Curso 2008–2009

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales,
19 de enero de 2009, examen.

Ejercicio 1.- (2,5 puntos) Hallar el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$$

si existe.

Ejercicio 2.- (2,5 puntos) Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto $(1,1)$ tal que $\nabla f(1,1) = (-1,2)$. Consideremos la función

$$\varphi(t) = f\big(2t + \cos t, (t+1)^3 + \operatorname{sen} t\big).$$

Hallar $\varphi'(0)$.

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Sea la función

$$f(x,y) := 5 + \min\big(x^2+y^2, (x-2)^2 + (y-2)^2\big).$$

Esta función no es diferenciable en el punto $P_0 = (1,1)$, pero existen vectores no nulos $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^2$ tales que $f'(P_0; \vec{\boldsymbol{v}}) = 0$. Hallar uno de estos vectores $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Como ayuda, se adjuntan las Figuras 1 y 2 que contienen algunas curvas de nivel de $f(x,y)$ y la superficie $z = f(x,y)$. Obsérvese que $f(1,1) = 7$.

Aclaración.- $\min(x,y)$ denota el menor de los números reales x e y. Por ejemplo, $\min(3,5) = 3$, $\min(2,2) = 2$, $\min(-2,1) = -2$.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de ensilladura de la función

$$f(x,y) := xy \exp\big(2 - x^2/2 - y^2/2\big).$$

Tiempo: 4 horas.

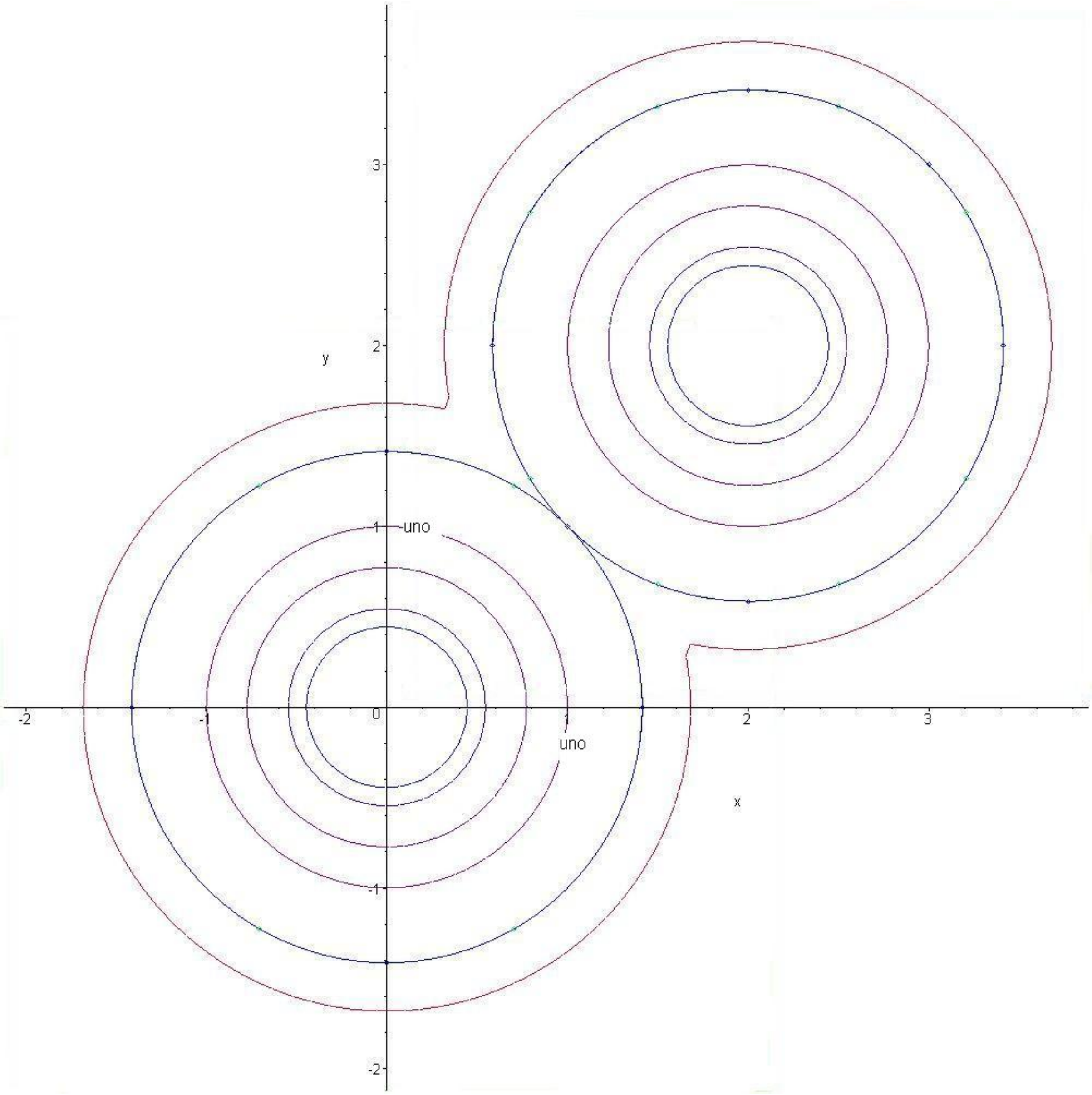

Figura 1: Curvas de nivel de $f(x, y)$.

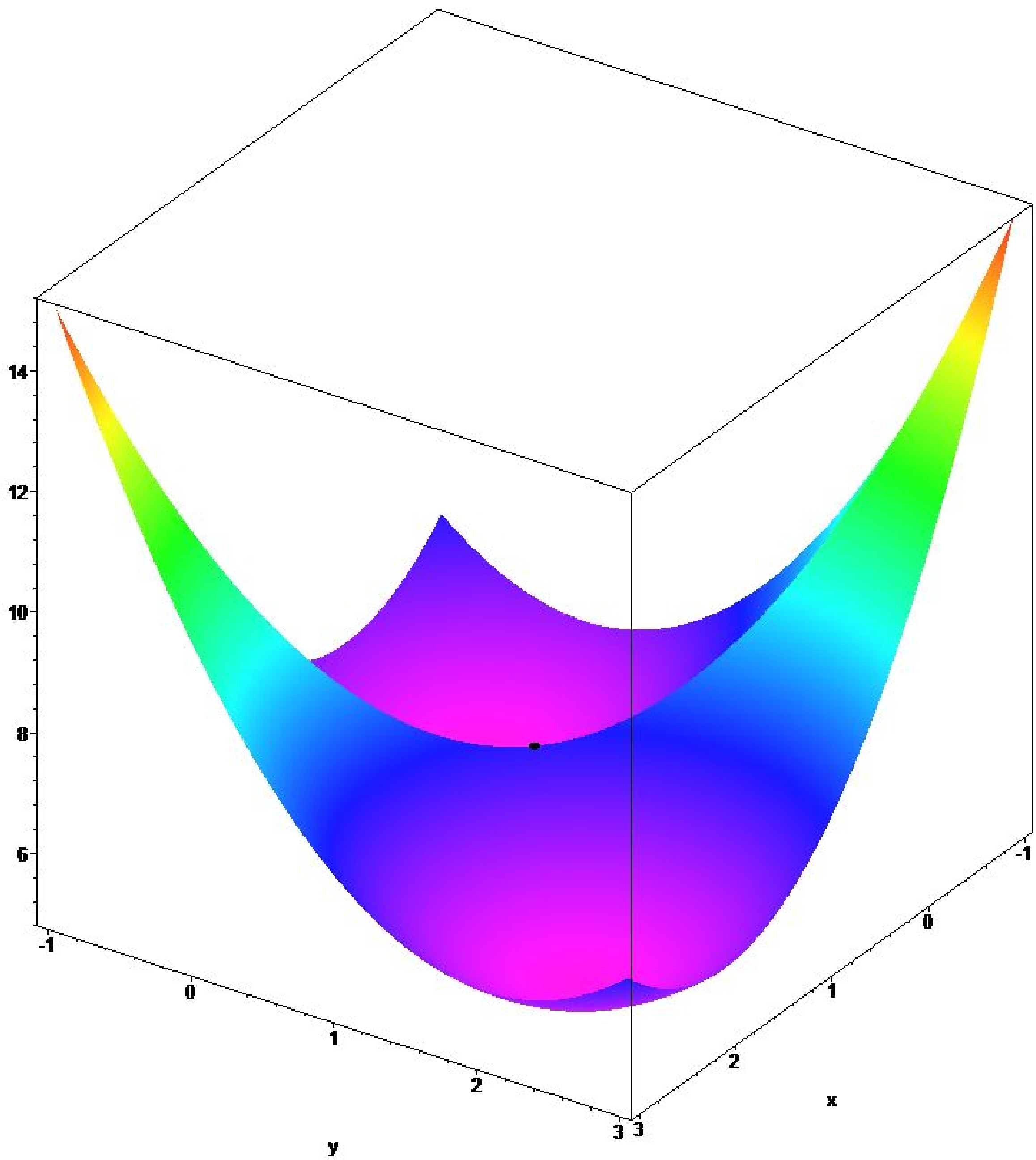

Figura 2: Superficie $z = f(x, y)$. En negro el punto $(1, 1, 7)$.