

Ampliación de Matemáticas

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 7 de junio de 2010, examen.
Puntuación total: 10. Cada ejercicio vale 2,5 puntos.

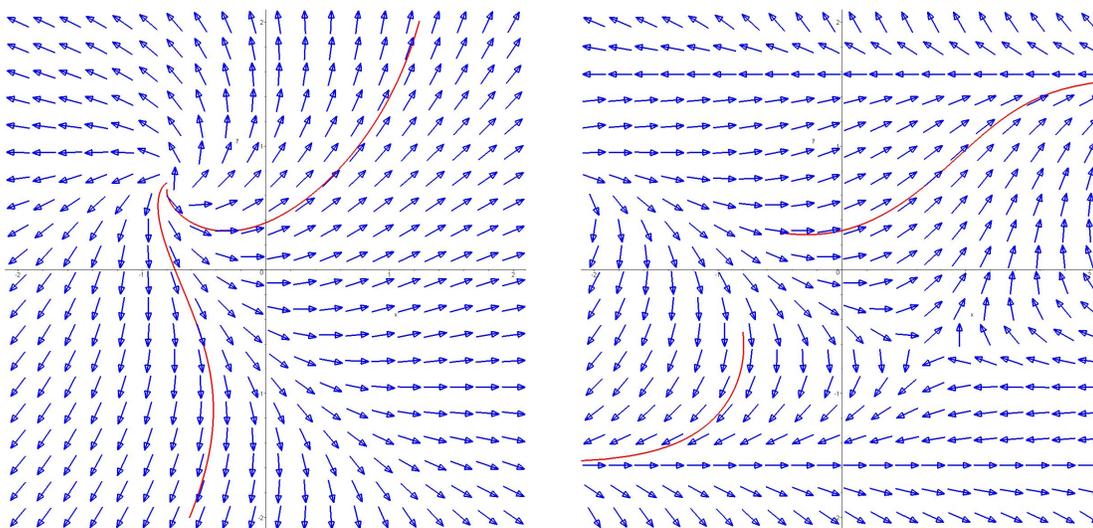
Ejercicio 1.- Las figuras muestran los campos vectoriales y dos trayectorias de los sistemas autónomos planos

$$(1) \begin{cases} x' = x + \cos y, \\ y' = y + \sin x; \end{cases}$$

y

$$(2) \begin{cases} x' = \cos x + \operatorname{tg} y, \\ y' = y + \sin x; \end{cases}$$

Emparejar cada figura con el sistema correspondiente



Ejercicio 2.- Hallar aproximadamente el valor de la integral

$$\int_0^1 \ln|x(t)| dt$$

siendo $x(t)$ la solución de la ecuación diferencial $x'' = x' + t \cos x$ que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 1$.

Ejercicio 3.- Demostrar que las tres funciones

$$\text{sen } 2t, t \text{ sen } 2t, te^t$$

son linealmente independientes en \mathbb{R} .

Ejercicio 4.- La longitud de una curva $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, entre los puntos $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, viene dada por la intergral

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$(3) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) - y(t). \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Supongamos que una partícula se mueve desde el punto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ en el instante inicial $t = 0$ hasta el punto $(x(2), y(2))$ en el instante final $t = 2$, de acuerdo con la ley de movimiento dada por el sistema (3). Hallar la velocidad media v_m de la partícula. Encontrar también el instante t_1 en el que la partícula lleva la velocidad v_m .

Indicación.- Soluciones: $v_m = 6,3649$; $t_1 = 1,2510$.