

Ampliación de Matemáticas

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 14 de septiembre de 2010, examen.
Puntuación total: 10. Cada ejercicio vale 2,5 puntos.

Ejercicio 1.- Sea $x(t)$ la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' = t + xx' \\ x(0) = 1, x'(0) = -0,4. \end{cases}$$

Hallar *aproximadamente* el área situada encima de la curva $x(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, y limitada por el eje x y la recta $x = 2$. En la Figura 1 la región cuya área se pide ha sido pintada con color azul.

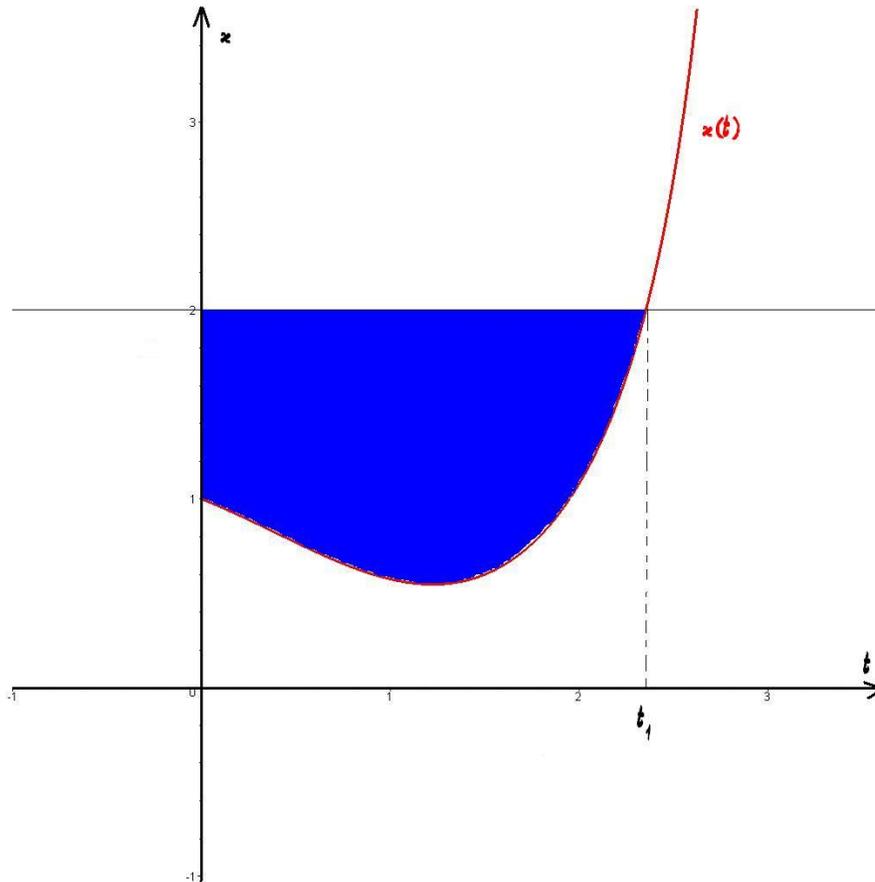


Figura 1: $x'' = t + xx'$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -0,4$.

Ejercicio 2.- Sea $x'' = f(x)$ una ecuación diferencial autónoma de segundo orden, donde $f(x)$ es una función de una variable real. La Figura 2 muestra cuatro soluciones $x(t)$ de esta ecuación diferencial, así como la gráfica de $f(x)$ en unos ejes t, x . Señalar todos los puntos de inflexión de estas cuatro soluciones $x(t)$ y explicar qué relación guardan con las raíces $1, -2$ de $f(x) = 0$.

Ejercicio 3.- Encontrar los números a_1 y a_2 para que e^{2t}, te^{2t} sean soluciones de la ecuación diferencial $x'' + a_1x' + a_2x = 0$.

Ejercicio 4.- Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} x' = -7x + 6y, \\ y' = -4x + 3y. \end{cases}$$

(1) Demostrar que cualquiera de sus trayectorias $(x(t), y(t))$ tiende a $(0, 0)$ cuando t tiende a ∞ . Es decir, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

(2) Hallar las rectas $ax + by = c$ que contienen trayectorias (no constantes).

(3) ¿Qué relación guardan las rectas del apartado (2) con los vectores propios de la matriz de los coeficientes del sistema?

Indicación.- Una trayectoria es una curva en el plano x, y que representa una solución $(x(t), y(t))$.

TIEMPO: 4 HORAS

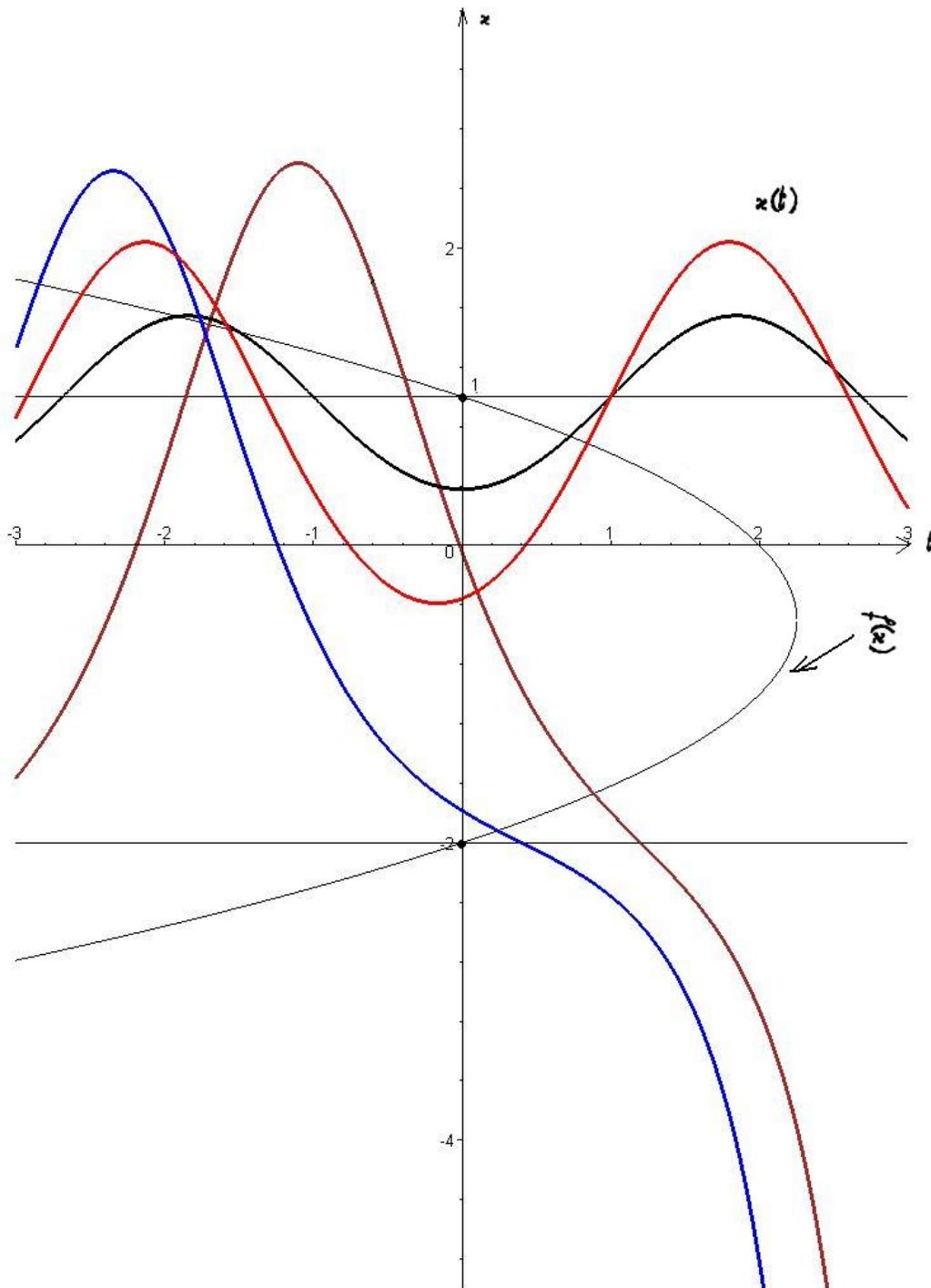


Figura 2: $x'' = f(x)$.