Apellidos, Nombre:

Matemáticas

Curso 2010-11. Examen final.

1º de CCAA y CTA, 19 de enero de 2011.

Ejercicio 1.- (Juan-Miguel Gracia) (2 puntos)

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen las condiciones $\|\vec{a} + 2\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 1$ y $\|\vec{a}\| = 1$, demostrar que $\vec{b} = \vec{0}$.

Ejercicio 2.- (Juan-Miguel Gracia) (2 puntos)

Hallar los dos puntos críticos de la función

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

y discutir su naturaleza (máximo o mínimo relativos, o punto de ensilladura).

Ejercicio 3.- (Pedro Arciniega) (2 puntos)

(a) Compruébese que la función $u(t) = \frac{9t^{\frac{5}{2}} - 4}{10t}$ es la solución de la ecuación diferencial

$$2t^2 u'(t) - 3t u(t) - 2 = 0,$$

que pasa por el punto $(1, \frac{1}{2})$.

(b) Encuéntrese la solución de la siguiente ecuación diferencial de Bernoulli,

$$4t^2 x x' - 3t x^2 - 2 = 0,$$

que pasa por el punto $(1, \frac{1}{2})$.

Indicación: Para resolver (b), se puede utilizar el resultado (a).

Ejercicio 4.- (Pedro Arciniega) (2 puntos)

Resuélvase el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = 2x - z \\ y' = y - z + x \\ z' = y + z - x \end{cases} \\ x(0) = 1, y(0) = 3, z(0) = -4 \end{cases}$$

Ejercicio 5.- (Paco Velasco) (2 puntos)

Un depósito de **100** litros de capacidad, está lleno de agua pura. A partir de un determinado instante fluye al depósito una solución salina de **1** gramo/litro de concentración, a razón de **2** litros por minuto, saliendo líquido del depósito a razón de **4** litros/minuto. Denotando por $x(t)$ a la cantidad de sal que hay en el depósito en el instante t , calcular el máximo de la función $x(t)$.