Apellidos, Nombre:

Matemáticas

Curso 2010-11. Examen final.

1º de CCAA y CTA, 19 de enero de 2011.

Ejercicio 1.- (Juan-Miguel Gracia) (*2 puntos*)

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen las condiciones $\|\vec{a}+2\vec{b}\|=1$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|=1$ y $\|\vec{a}\|=1$, demostrar que $\vec{b}=\vec{0}$.

Solución De $\|\vec{a}+2\vec{b}\|=1 \Rightarrow (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=1$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}=1 \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\|\vec{b}\|^2=1 \Rightarrow$$

$$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\|\vec{b}\|^2=1 \Rightarrow$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\|\vec{b}\|^2=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=0}$$ primera ecuación en las incógnitas "$\vec{a}\cdot\vec{b}$" y "$\|\vec{b}\|^2$".

De $\|\vec{a}-\vec{b}\|=1 \Rightarrow \|\vec{a}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=1 \Rightarrow$

$$1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=1 \Rightarrow \boxed{-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=0}$$ segunda ecuación en las incógnitas "$\vec{a}\cdot\vec{b}$" y "$\|\vec{b}\|^2$".

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=0 & \text{multiplicando por } 2 \Rightarrow \cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}+2\|\vec{b}\|^2=0\\ -2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2=0 & \longrightarrow \cancel{-2\vec{a}\cdot\vec{b}}+\|\vec{b}\|^2=0\end{cases}$$

$$3\|\vec{b}\|^2=0$$

$$3\|\vec{b}\|^2=0 \Rightarrow \|\vec{b}\|^2=0 \Rightarrow \|\vec{b}\|=0 \Rightarrow \vec{b}=\vec{0}.$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{b}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow$$