Ejercicio 2.- (Juan-Miguel Gracia)(*2 puntos*)
Hallar los dos puntos críticos de la función

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

y discutir su naturaleza (máximo o mínimo relativos, o punto de ensilladura).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

para hallar los puntos críticos

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

ó $\begin{cases} x^2 = y \\ x = y^2 \end{cases}$ $(0,0)$ se "ve" que es una solución

sustituyendo $y = x^2$ en la segunda ecuación:

$$x = (x^2)^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow$$

$$x - x^4 = 0, \quad x(1 - x^3) = 0 \begin{cases} \nearrow x = 0 \\ \searrow 1 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1 \end{cases}$$

Como $y = x^2 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \Rightarrow (x,y) = (1,1)$ es otra solución. Como nos dicen que sólo hay dos puntos críticos: estos son $(0,0)$ y $(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \Delta \Rightarrow \Delta = -9 < 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura.

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$

$$A = 6 > 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ tiene en $(1,1)$ un mínimo relativo.