Apellidos:

Nombre:

Matemáticas

Curso 2011-12. Examen final.
1º de CTA y CCAA, 27 de enero de 2012.

Ejercicio 1 (2,5 puntos) Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t) + t \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) - t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos) Dados los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ del plano $\mathbb{R}^2$, donde al menos un par de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son distintos, demostrar que el baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ pasa por la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a estos puntos en el sentido de los mínimos cuadrados.

Indicación.- Sabemos que a y b vienen dados por las ecuaciones

$$a = \frac{\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}} - n\bar{x}\bar{y}}{\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} - n\bar{x}^2},$$
$$b = \frac{\bar{y}(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}) - \bar{x}(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}})}{\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} - n\bar{x}^2},$$

donde $\vec{\boldsymbol{x}} := (x_1, x_2, \ldots, x_n), \vec{\boldsymbol{y}} := (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Este ejercicio pide demostrar que

$$a\bar{x} + b = \bar{y}.$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos) La temperatura en el punto (x, y, z) del espacio respecto de un sistema de coordenadas cartesianas viene dada por

$$T(x, y, z) = -2x^2z - 2xy + xz$$

en ºC, y donde x, y, z se miden en metros. Una mosca situada en el punto $P_0 = (1, -1, 1)$ tiene calor. Hallar la temperatura en P_0. Se pide

(a) ¿En qué dirección debe moverse para enfriarse lo más aprisa posible? La dirección viene dada por un vector $\vec{\boldsymbol{v}}$, que es lo que hay que encontrar.

(b) Si la mosca vuela en la dirección de la semirrecta que arranca del punto P_0 en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ va encontrando puntos más fríos hasta que llega a un punto P_1 donde la temperatura empieza a subir. Hallar P_1 y la temperatura en este punto.

Ejercicio 4 (2,5 puntos) En el mapa de curvas de nivel de una función $f(x, y)$, se ha dibujado además un vector unitario $\vec{\boldsymbol{u}}$ indicado en color rojo; véase la Figura 1.

1. Señalar el punto o puntos P_0 donde $f(P_0) = -10,\ f'(P_0, \vec{\boldsymbol{u}}) = 0,$
2. ¿Es $f'(Q_1, \vec{\boldsymbol{u}}) > 0, = 0, < 0$?
3. ¿Es $f'(Q_2, \vec{\boldsymbol{u}}) > 0, = 0, < 0$?

Razonar brevemente las respuestas.

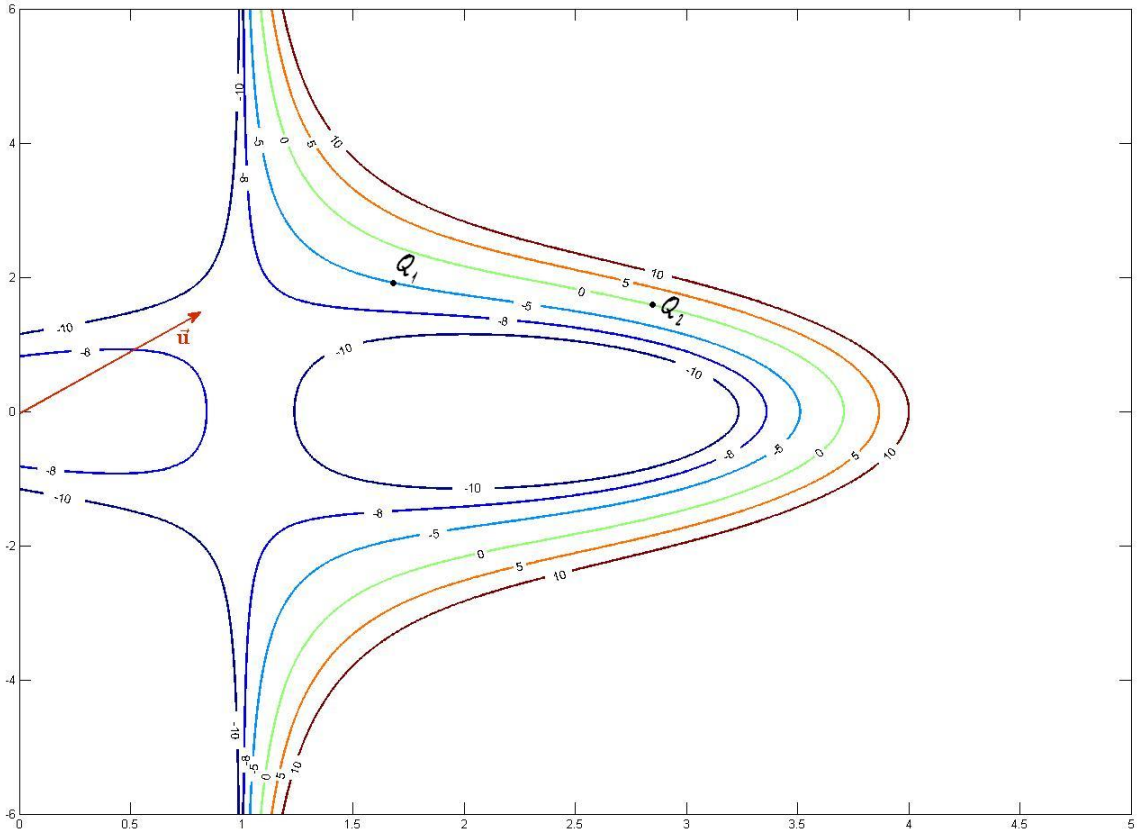

Figura 1: Mapa de curvas de nivel y vector unitario.

TIEMPO: 4 HORAS.