

Apellidos:

Nombre:

Matemáticas

Curso 2013-14. Examen final extraordinario.
1º de CTA y CCAA, 25 de junio de 2014.

Ejercicio 1 (2.5 puntos) Sea $f(x, y)$ la función definida por

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demostrar que la función $f(x, y)$ es diferenciable en todo punto del plano. Probar que las funciones $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ no son continuas en el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos) Sea $g(t)$ una función derivable de una variable real t . Se pide encontrar $g(t)$ para que el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) := g(x^2 + y) \vec{i} + \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3y + xy^2 + x \right) \vec{j}$$

sea un gradiente. Después hallar una función $f(x, y)$ tal que $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$ y $f(1, 1) = 4$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo el plano. La Figura 1 muestra las tres funciones auxiliares

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= f(0.5 + 0.15t, 0.7 - 0.3t), \\ \varphi_2(t) &:= f\left(0.5 + \frac{0.57}{2}t, 0.7 - 0.57t\right), \\ \varphi_3(t) &:= f\left(0.5 + \frac{0.1}{\sqrt{5}}t, 0.7 - \frac{0.2}{\sqrt{5}}t\right). \end{aligned}$$

Como cuestión general, se pide identificar razonadamente cada función auxiliar con su color en la gráfica (verde, azul, rojo). En particular, contestar a las preguntas: ¿Por qué sus valores extremos relativos (máximos, mínimos) son los mismos? ¿Por qué estos extremos se alcanzan para diferentes valores de t ? ¿Qué valores? ¿Por qué sus puntos de inflexión tienen la misma ordenada (coordenada en el eje vertical)?

Ejercicio 4 (2.5 puntos) Hallar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que mejor se ajusta a los puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 10$, donde

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_{10}) := (-5, -4, -4, -1, 2, 3, 3, 0, 4, 5), \\ \vec{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_{10}) := (-1, 2, 1, -3, 2, -2, 2, 3, -2, 1), \end{aligned}$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

Indicación.- Solución $a = 5.0602$, $b = 2.8753$.

TIEMPO: 4 HORAS.

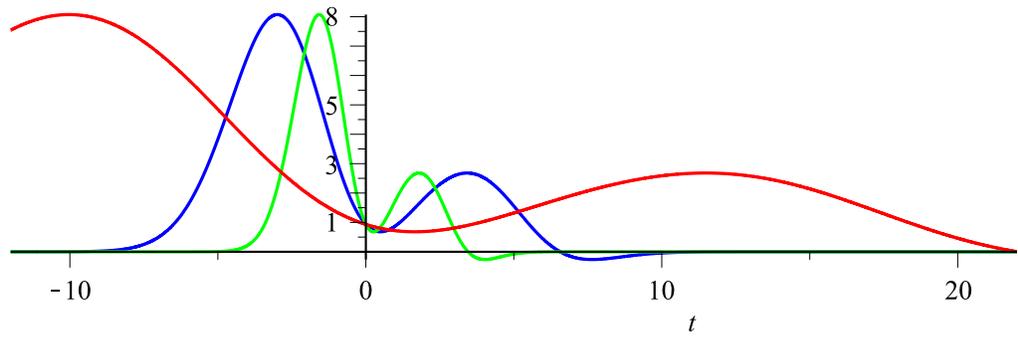


Figura 1: Funciones auxiliares $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ y $\varphi_3(t)$.