

Apellidos:

Nombre:

Matemáticas

Curso 2013-14. Examen final.

1º de CTA y CCAA, 17 de enero de 2014.

Ejercicio 1 (2.5 puntos) Sean los vectores $\vec{a} = (1, -1, 3)$ y $\vec{b} = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que para todo número real x se tiene que

$$\|x\vec{a} + \vec{b}\| < 4\|x\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos) Sea la función

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Probar que $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.
- (b) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- (c) Demostrar que $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos) A partir de una función $f(x, y)$ diferenciable en todo punto del plano, se obtienen las gráficas de las funciones auxiliares siguientes:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &:= f(1 + 2t, t/2), & \phi, \varphi \text{ se leen ambas } fi, \\ \phi_2(t) &:= f(1 + t/5, -3t), \\ \psi_1(t) &:= f(1 - t, 1 + 3t), & \psi \text{ se lee } psi, \\ \psi_2(t) &:= f(1 + t/5, 1 - 3t/5). \end{aligned}$$

Las funciones $\phi_1(t), \phi_2(t)$ pueden verse en la Figura 1, y las funciones $\psi_1(t), \psi_2(t)$ pueden verse en la Figura 2. De la información facilitada se deduce que uno de los puntos $(1, 0), (1, 1)$ es con certeza punto de ensilladura de $f(x, y)$. ¿Cuál es y por qué?

Indicación.- Se recuerda que la definición de *punto de ensilladura* (x_0, y_0) de una función diferenciable $f(x, y)$ es la siguiente:

- (x_0, y_0) es un punto crítico;
- en todo entorno de (x_0, y_0) existen puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tales que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos) Sea $f(x, y)$ la función tal que

$$\nabla f(x, y) = (x^3 + 3y^2 - 6x, 6xy - 6y)$$

y $f(0, 0) = 6$. Hallar los cinco puntos críticos de $f(x, y)$ y averiguar su naturaleza (máximo relativo, mínimo relativo, punto de ensilladura) mediante el criterio del hessiano. Hallar el valor de $f(x, y)$ en los puntos de ensilladura.

TIEMPO: 4 HORAS.

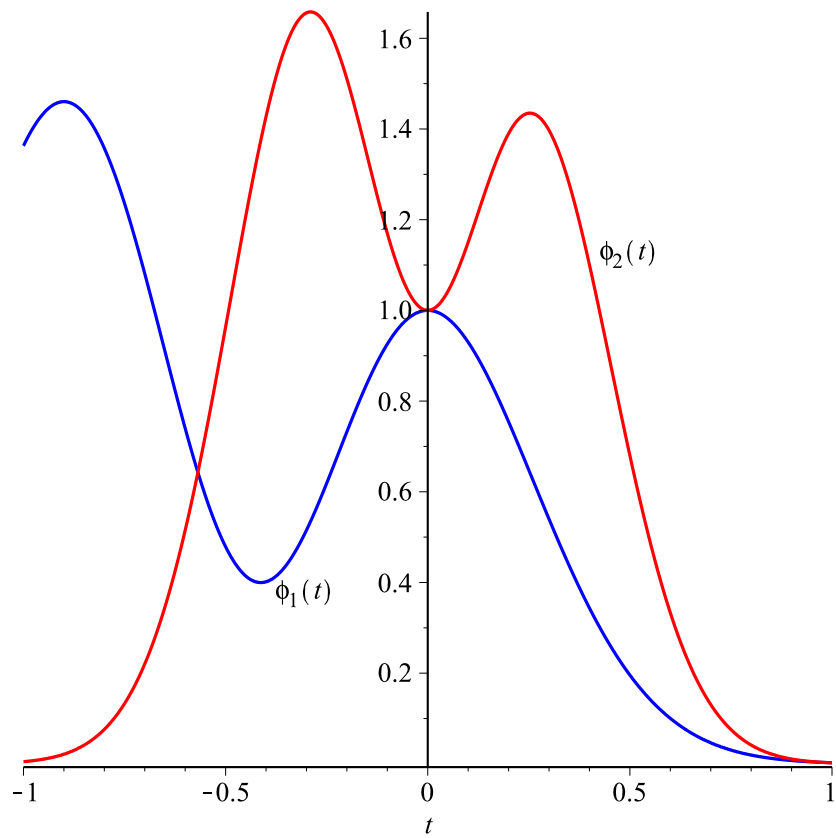


Figura 1: Funciones auxiliares $\phi_1(t), \phi_2(t)$.

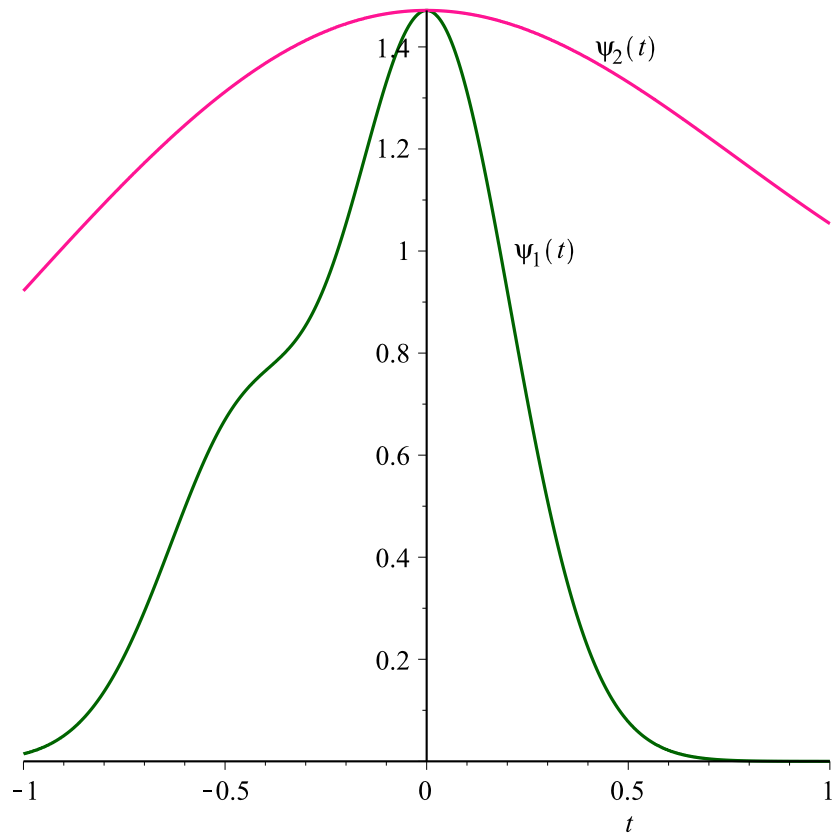


Figura 2: Funciones auxiliares $\psi_1(t), \psi_2(t)$.