Matemáticas de 1º de CTA y CCAA

20 de enero de 2015
Examen final

Ejercicio 1 (2 puntos) Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\|\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\| = 1, \quad \|\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}\| = 2, \quad \|2\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\| = 2.$$

Se pide hallar el área del triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$, siendo

$$P := -4\vec{\boldsymbol{a}} - 3\vec{\boldsymbol{b}}, \quad Q := \vec{\boldsymbol{a}} + 2\vec{\boldsymbol{b}} \quad \text{y} \quad R := 2\vec{\boldsymbol{a}} - 5\vec{\boldsymbol{b}}.$$

Indicación.- Para hallar el área del triángulo se puede usar la fórmula de Herón, que dice que si α, β, γ son las longitudes de los lados de un triángulo y

$$s := \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

es su semi-perímetro, entonces su área A viene dada por

$$A = \sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}.$$

Ejercicio 2 (2 puntos) Consideremos la recta

$$\begin{cases} x = 10 + 3t, \\ y = 20 + 2t, \\ z = 30 + t, \end{cases}$$

y las esferas

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 10z + 71 = 0,$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 12y + 12z - 13 = 0.$

¿Qué esfera está más próxima a la recta?

Indicación.- La esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio $r > 0$ tiene la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

que equivale a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0.$$

Así pues, la esfera (1) tiene de centro $(5, 5, 5)$ y $5^2 + 5^2 + 5^2 - r^2 = 71$ nos dada $75 - r^2 = 71$; de donde $4 = r^2$ y, de aquí, $r = 2$. Es decir que 2 es el radio de la esfera (1) [...]

Ejercicio 3 (2 puntos) *Problema de ajuste por mínimos cuadrados.* Dados $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ e

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (-1, 2.94, 3.38, -0.54, -2.12, -2.03),$$

hallar la función de la forma $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos 2x$ que hace mínima la suma

$$E(a, b) := \sum_{i=1}^{6} \big(y_i - f(x_i)\big)^2.$$

Ejercicio 4 (2 puntos) Consideremos la función

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y + 2x^2 + 10xy + 2y^2}{x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + x^2 + 5xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Probar que todos los límites direccionales $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ existen y valen 2, excepto los límites $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ correspondientes a dos valores particulares de m que existen pero no valen 2. Demostrar que el restante límite direccional $\lim_{y\to 0} f(0, y)$ también existe y vale 2.

(b) ¿Por qué $f(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$?

(c) Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Ejercicio 5 (2 puntos) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo punto del plano. Supongamos que para un valor de c la curva de nivel $f(x, y) = c$ tiene un punto aislado (x_0, y_0). Demostrar que este punto es crítico y que no puede ser punto de ensilladura.

Indicación.- Para cada $r > 0$ se llama *entorno de* (x_0, y_0) *de radio* r al conjunto

$$B\big((x_0, y_0), r\big) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\Big\}.$$

Que (x_0, y_0) es un punto aislado de la curva $f(x, y) = c$ quiere decir que existe un $r_0 > 0$ tal que el único punto que esta curva tiene dentro del entorno $B\big((x_0, y_0), r_0\big)$ es (x_0, y_0). En la Figura 1 se ve un ejemplo relativo a la función $f(x, y) := 40x^3y - 40xy^3 - 10x^2 - 70y^2$ donde aparece la curva de nivel $f(x, y) = 0$, que tiene el punto aislado $(0, 0)$.

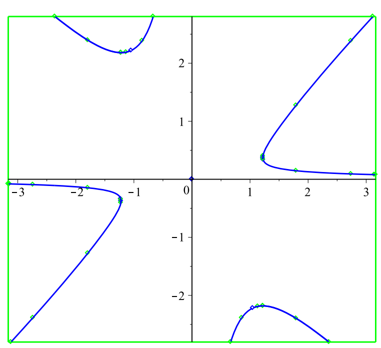

Figura 1: La curva de nivel $f(x, y) = 0$ tiene el punto aislado $(0, 0)$.

Ejercicio 6 (2 puntos) Sea la función

$$f(x,y) := \frac{2x-3y}{x^2+y^2+2}$$

(1) ¿Para qué valores de c tiene puntos la curva de nivel $f(x,y)=c$? Demostrar que para esos valores de c, excepto para $c=0$, la curva $f(x,y)=c$ es una circunferencia o sólo tiene un punto; hallar su centro y su radio en función de c. ¿Qué clase de línea es la curva $f(x,y)=0$?

(2) Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)$. Confirmar los resultados de la parte (1) a la luz de los obtenidos en esta parte.

Indicación para la parte (1).- Sean α,β,γ números reales dados. Entonces el conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\}$$

es una circunferencia, o es un conjunto vacío. En efecto, completando cuadrados la ecuación

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \tag{1}$$

equivale a

$$(x+\alpha/2)^2+(y+\beta/2)^2-\alpha^2/4-\beta^2/4+\gamma=0,$$

o

$$(x+\alpha/2)^2+(y+\beta/2)^2=\alpha^2/4+\beta^2/4-\gamma. \tag{2}$$

Si fuera $\alpha^2/4+\beta^2/4-\gamma\geq 0$, la ecuación (1) representaría una circunferencia de centro $(-\alpha/2,-\beta/2)$ y radio $\sqrt{\alpha^2/4+\beta^2/4-\gamma}$.

Si fuera $\alpha^2/4+\beta^2/4-\gamma<0$, no existiría ningún punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que satisficiera (1), pues el primer miembro de (2) sería ≥ 0 por ser una suma de cuadrados, y un número no puede ser ≥ 0 y <0 a la vez.

Aviso.- Úsese la calculadora en modo *radianes.*

Se tendrán en cuenta las cinco mejores notas. Se aprueba con 5 puntos.