Matemáticas de 1º de CTA y CCAA

26 de junio de 2015
Examen final

Ejercicio 1 (2 puntos) Sabiendo que los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ de $\mathbb{R}^3$ forman un ángulo de $\pi/6$ radianes y que $\|\vec{\boldsymbol{a}}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{\boldsymbol{b}}\| = \sqrt{2}$, hallar el producto escalar

$$(\vec{\boldsymbol{a}} + 3\vec{\boldsymbol{b}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}).$$

Ejercicio 2 (2 puntos) Hallar los radios de las dos esferas de centro $(1, -1, 2)$ que son tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 10z + 71 = 0$. Hallar también los puntos de tangencia.

Ejercicio 3 (2 puntos) *Problema de ajuste por mínimos cuadrados.* Dados $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, 1, 2)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-1, -2, 2, 3)$, hallar la función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2$ que hace mínima la suma

$$E(a, b) := \sum_{i=1}^{4} \big(y_i - f(x_i)\big)^2.$$

Ejercicio 4 (2 puntos) Demostrar que la función

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$, pero que no es diferenciable en ese punto.

Ejercicio 5 (2 puntos) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo punto del plano. Supongamos que para un valor de c_0 la curva de nivel $f(x, y) = c_0$ tiene sólo un punto (x_0, y_0). Es decir, que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c_0\} = \{(x_0, y_0)\}.$$

Demostrar que en este punto la función $f(x, y)$ alcanza un máximo o un mínimo absolutos.

Ejercicio 6 (2 puntos) Sea la función

$$f(x, y) := \frac{x - y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Estudiar sus curvas de nivel. ¿Qué clase de curvas son? Deducir de aquí los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$.

Se tendrán en cuenta las cinco mejores notas. Se aprueba con 5 puntos.