Matemática Aplicada

Grupo 01 de 1^o de Farmacia, 10 de Febrero de 1998, Examen

Cuestión 1.- (2 puntos) Muchos teoremas válidos para funciones reales son válidos también para funciones matriciales. Sean $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dos funciones matriciales continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b),

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b].$$

Bajo estas hipótesis, consideremos las afirmaciones siguientes:

Afirmación 1.- Si para todo $t \in (a,b)$ se tiene que

$$F'(t) = G'(t),$$

entonces existe una matriz constante $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que para todo $t \in [a,b]$

$$F(t) = G(t) + K.$$

Afirmación 2.- Existe un punto $t_0 \in (a,b)$ tal que

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(t_0).$$

Discutir razonadamente la validez o no validez de estas afirmaciones.

Problema 2.- (2 puntos) Hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x'(t) = x(t) + t$$

que hace mínima la integral

$$\int_0^1 [x(t)]^2 \, dt.$$

Problema 3.- (2 puntos) Hallar el polinomio de grado ≤ 3

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

que verifica

$$p(-1) = -4, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 2, \quad p(2) = 14.$$

Problema 4.- (2 puntos) Hallar dos funciones continuas $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tales que para todo x real:

$$\begin{cases} g_1(x) = \int_0^x (xt - g_1(t) + 2g_2(t))\, dt, \\ \\ g_2(x) = \int_0^x (x - g_1(t) + 2g_2(t))\, dt. \end{cases}$$

Problema 5.- (2 puntos) Se consideran dos depósitos conectados de 100 litros de capacidad, inicialmente llenos con una mezcla de alcohol y agua.

En el depósito superior penetran por arriba 3 litros de agua (pura) por minuto y por la parte izquierda 2 litros de mezcla por minuto. La mezcla (bien agitada) sale por la parte derecha a razón de 3 litros por minuto y por debajo va al depósito inferior a razón de 2 litros por minuto. A esta misma velocidad sale también la mezcla del depósito inferior.

El depósito superior contiene inicialmente 10 litros de alcohol y 90 litros de agua. El depósito inferior contiene inicialmente 20 litros de alcohol y 80 litros de agua.

Calcular los litros de alcohol presentes en los depósitos a los t minutos de comenzar el bombeo. Discutir brevemente los resultados obtenidos a la luz del sentido común.