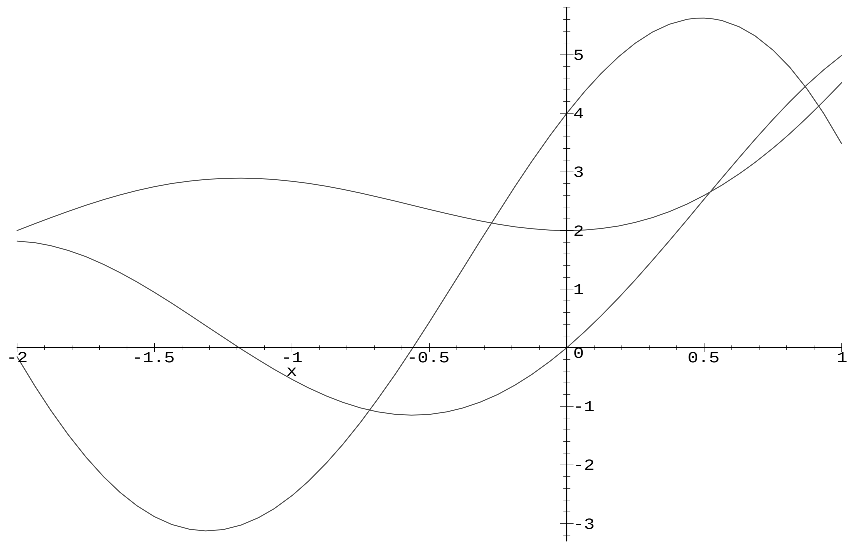
# Matemática Aplicada

**Grupo 01** de 1$^o$ de Farmacia, 9 de Febrero de 1999, Examen

**Importante.-** Contestar solamente a 4 ejercicios de los 5 propuestos.
No obstante, si se prefiere, pueden entregarse respuestas a los 5 ejercicios; en cuyo caso, la nota obtenida será la suma de las 4 notas de ejercicio más altas.

**Cuestión 1.-** (2'5 puntos) Interpretación cinemática del teorema del valor medio para derivadas: Un coche va por una autopista ...

**Problema 2.-** (2'5 puntos) En la figura que sigue se han dibujado las gráficas de una función $f$ y de sus derivadas $f'$ y $f''$. ¿Cuáles son las curvas correspondientes a $f, f'$ y $f''$? Decir todas las razones que se sepan.
(La figura se reproduce a mayor escala en una hoja adjunta en la que se pueden hacer anotaciones y que se entregará con el examen).



**Problema 3.-** (2'5 puntos) Hallar dos funciones continuas $g_1(x), g_2(x)$ tales que para todo número real $x$:

$$\begin{cases} g_1(x) = \int_0^x (g_1(t) + g_2(t))\, dt - x^2/2, \\ g_2(x) = -\int_0^x g_2(t)\, dt - x. \end{cases}$$

**Problema 4.-** (2'5 puntos) Se combinan $M$ gramos de una sustancia química $C$ con $M$ gramos de una sustancia química $D$ en un volumen de $V$ litros de solución acuosa, para producir $T$ y $U$ de acuerdo con la reacción de segundo orden

$$C + D \longrightarrow T + U.$$

Sea $x(t)$ la suma total de los gramos de $C$ y $D$ que han desaparecido (o reaccionado) al cabo de $t$ minutos. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas:

**(a)** Demostrar que

$$\frac{dx}{dt} = K\left(M - \frac{m_C}{m_C + m_D}x\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C + m_D}x\right)$$

donde $m_C$ y $m_D$ son los pesos moleculares de $C$ y $D$, respectivamente, y $K$ es una constante positiva.

**(b)** Demostrar que el número de gramos de $T$ y $U$ formados al cabo de $t$ minutos son $m_T \cdot y(t)$ y $m_U \cdot y(t)$, en donde

$$r := MK \cdot \frac{m_C - m_D}{m_C + m_D}, \qquad y(t) := M \cdot \frac{1 - e^{rt}}{m_D - m_C \cdot e^{rt}},$$

$m_T$, $m_U$ son los pesos moleculares de $T$ y $U$, y hemos supuesto que $m_C \neq m_D$. Adviértase que $m_C + m_D = m_T + m_U$.

**Problema 5.-** (2'5 puntos) Se consideran tres depósitos interconectados de capacidad 100 litros entre los que circula una mezcla —bien agitada— de tres líquidos $A, B$ y $C$. Las cantidades iniciales, en litros, de los líquidos $A, B$ y $C$ en cada uno de los tres depósitos vienen dadas por la tabla:

| Líquido | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| depósito $1^o$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ |
| depósito $2^o$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
| depósito $3^o$ | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ |

donde, naturalmente, $a_i + b_i + c_i = 100$ litros para $i = 1, 2, 3$.

Desde el exterior penetra 1 litro de líquido $A$ por segundo en el depósito $1^o$, 1 litro de líquido $B$ por segundo en el depósito $2^o$ y 1 litro de líquido $C$ por segundo en el depósito $3^o$. Al exterior fluyen 3 litros de mezcla por segundo desde el depósito $3^o$. La información restante viene dada en la figura que sigue.

$1^o$.- **Plantear** los sistemas de ecuaciones diferenciales que sirven como modelos matemáticos para estudiar la evolución de los litros de $A, B$ y $C$ en cada uno de los tres depósitos en el transcurso del tiempo $t$ —medido en segundos. *No resolver estas ecuaciones diferenciales.*

$2^o$.- ¿Habrá unas condiciones iniciales $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ que permitan que el número de litros de $A, B$ y $C$ en cada depósito permanezca constante? (Estado estacionario del sistema). En caso de respuesta afirmativa, hallarlas.