Matemática Aplicada

Grupo 01 de 1^o de Farmacia,6 de septiembre de 1999, Examen

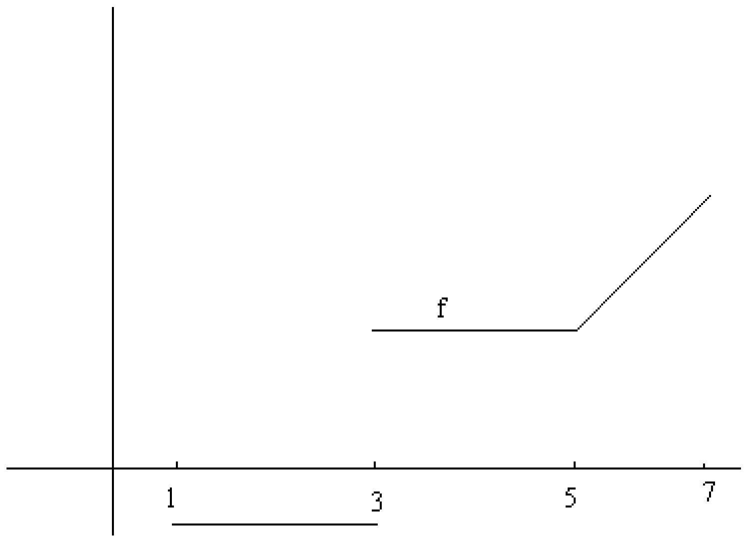
Importante.- Contestar solamente a 4 ejercicios de los 5 propuestos.
No obstante, si se prefiere, pueden entregarse respuestas a los 5 ejercicios; en cuyo caso, la nota obtenida será la suma de las 4 notas de ejercicio más altas.

Cuestión 1.- (2'5 puntos) Interpretación geométrica del teorema del valor medio para derivadas: Se considera la recta tangente a la curva ...

Problema 2.- (2'5 puntos) Decir todo lo que se pueda de la gráfica $y = F(x)$ de la función

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$$

sabiendo que la gráfica de $f : [1,7] \to \mathbb{R}$ es



Problema 3.- (2'5 puntos) Hallar el valor mínimo que puede tomar la integral

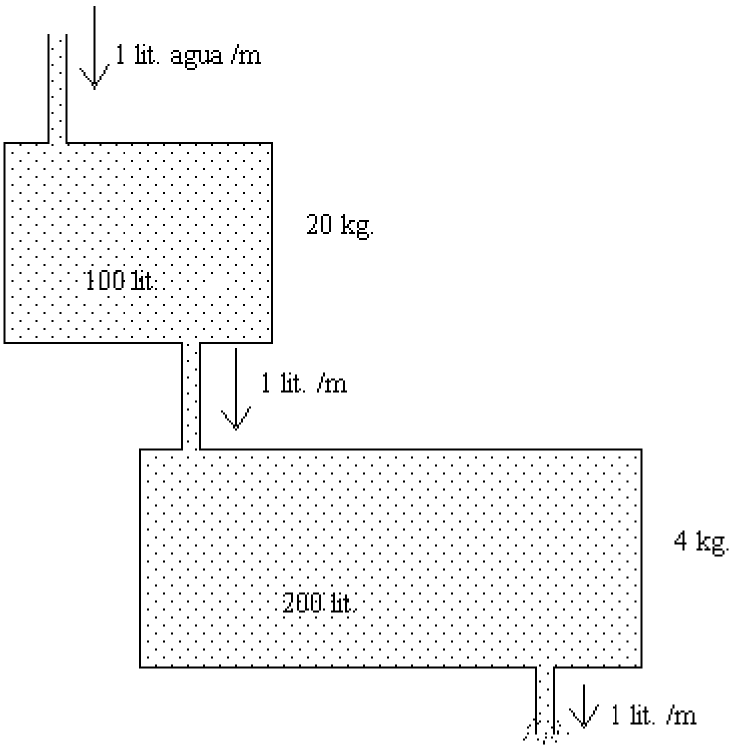
$$\int_0^1 [x(t)]^2 \, dt,$$

cuando $x(t)$ recorre el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - 2.$$

Problema 4.- (2'5 puntos) En un depósito que contiene 20 kg de sal en 100 litros de solución se vierte 1 litro de agua pura por minuto. La mezcla (homogénea) que se forma se derrama a la misma velocidad en otro depósito de 200 litros lleno inicialmente de agua con 4 kg de sal, saliendo igualmente el exceso de líquido de éste por un orificio inferior.

- Hallar la cantidad de sal presente en ambos depósitos a los t minutos de empezar el bombeo.
- ¿Hay algún momento en que la cantidad de sal en ambos depósitos sea igual? ¿cuál sería esa cantidad?



Problema 5.- (2'5 puntos) Supongamos que x_0 bacterias se ponen en una solución nutritiva en el instante $t = 0$ y que $x(t)$ es el número de bacterias del cultivo en un momento posterior t. Si el espacio es limitado y los alimentos se suministran de manera regular, la competencia por los alimentos y el espacio actuarán de tal modo que la población se estabilizará en N bacterias. Plantear (y resolver) una ecuación diferencial que pueda servir de modelo matemático para este fenómeno de manera que la solución que verifique la condición inicial $x(0) = x_0$ sea la función

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-kNt}}$$

donde k es una constante positiva. Dibujar la gráfica de $x(t)$.