Matemática Aplicada: Soluciones esquemáticas

Grupo 01 de 1^o de Farmacia, 9 de Febrero de 1999, Examen

Importante.- Contestar solamente a 4 ejercicios de los 5 propuestos.
No obstante, si se prefiere, pueden entregarse respuestas a los 5 ejercicios; en cuyo caso, la nota obtenida será la suma de las 4 notas de ejercicio más altas.

Cuestión 1.- (2'5 puntos) *Interpretación cinemática del teorema del valor medio para derivadas: Un coche va por una autopista ...*

SOLUCIÓN.- El teorema del valor medio para derivadas dice que si $f(x)$ es una función real definida y continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y es derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, entonces existe al menos un punto x_0 en el intervalo abierto (a, b) tal que

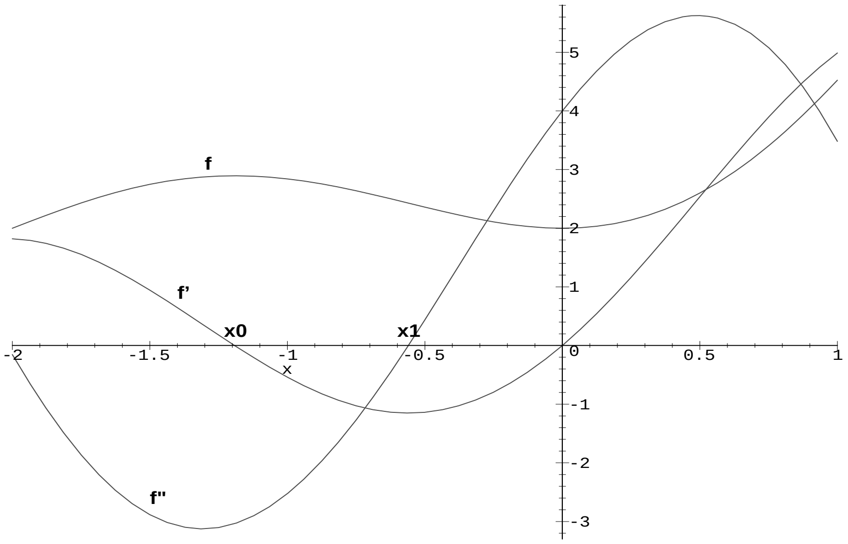
$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Una interpretación cinemática de este teorema, que fue explicada en clase, es que la velocidad media de un coche en un trayecto es igual a su velocidad instantánea en cierto instante: Supongamos que un coche va por una autopista desde el punto A hasta el punto B. Sean $f(t)$ los kilómetros que ha recorrido el coche desde A hasta el tiempo t —medido en horas. La derivada de esta función $v(t) := f'(t)$ es la velocidad (instantánea) del coche en el momento t. Supongamos que desde A hasta B hay una distancia de 230 km. y que el coche tarda 2 horas en hacer este recorrido. Entonces la velocidad media del coche en este trayecto total es de $230/2 = 115$ km/h. El teorema del valor medio implica que al menos en algun instante t_0 la velocidad del coche ha sido exactamente igual a 115 km/h: $v(t_0) = 115$, pues existe un $t_0 \in (0, 2)$ tal que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(t_0)$$

Este hecho matemático resulta evidente a partir de nuestra experiencia como viajeros de coches. Pues si nuestro coche nunca hubiera ido a 115 km/h sería porque siempre habría ido a una velocidad mayor que 115 km/h, o a una velocidad menor que 115 km/h. No podría ser que hubiera ido todo el rato a una velocidad mayor que 115 km/h, pues arrancaría de estar parado y, por lo tanto, al principio su velocidad sería muy pequeña. En consecuencia, siempre habría ido a menos de 115 km/h. Pero, en este caso, habría tardado en hacer el viaje más de 2 horas. Lo que sería una contradicción.

Problema 2.- (2'5 puntos) *En la figura que sigue se han dibujado las gráficas de una función f y de sus derivadas f' y f''. ¿Cuáles son las curvas correspondientes a f, f' y f''? Decir todas las razones que se sepan.*



SOLUCIÓN.- Las funciones f, f' y f'' han sido señaladas en la figura precedente. He aquí algunas razones para esta asignación:

- Observemos que ninguna de las tres funciones es creciente en todo el intervalo $[-2, 1]$. La gráfica de una de las tres funciones está siempre por encima del eje x; esto implica que esta curva no puede corresponder a f' ni a f'' (pues las otras dos gráficas no son crecientes en $[-2, 1]$). Por lo tanto, dicha gráfica corresponde necesariamente a la función f.

- En los puntos x_0 y 0 en los que f' se hace cero ($f'(x_0) = 0, f'(0) = 0$), la función $f(x)$ tiene un máximo y un mínimo respectivamente.

- En los intervalos $[-2, x_0)$ y $(0, 1)$ en los que $f'(x)$ es positiva, la función $f(x)$ es creciente. En el intervalo $(x_0, 0)$ la función $f'(x)$ es negativa y, por lo tanto, la función $f(x)$ es decreciente.

- En el intervalo $[-2, x_1)$ la función $f''(x)$ es negativa, por lo que la función $f(x)$ es cóncava. En el intervalo $(x_1, 1]$ la función $f''(x)$ es positiva, lo que implica que la función $f(x)$ es convexa.

- En el punto x_1 la función $f''(x)$ se anula. Este dato, junto con el punto anterior, implican que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_1. Además, por la inclinación de la curva $y = f''(x)$ en x_1, se deduce que $f'''(x_1) > 0$; por lo que $f'''(x_1) \neq 0$; lo que corrobora que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_1. Asímismo, se ve que $f'(x)$ tiene un mínimo en x_1.

- De la figura se deduce que $f''(x_0) \simeq -3$, por lo que $f(x)$ tiene un máximo en x_0. También vemos que $f''(0) = 4$; de donde se confirma que $f(x)$ tiene un mínimo en 0.

- Por último, pero no menos importante, la función $f(x)$ es la que menos oscila y la función $f''(x)$ es la que más varía; la función $f'(x)$ tiene un intervalo de variación intermedia entre ambas. Dicho de otro modo, el intervalo de valores de $f(x)$ sobre $[-2, 1]$ es menor que el intervalo de valores de $f'(x)$ sobre $[-2, 1]$, y éste —a su vez— es menor que el intervalo de valores de $f''(x)$ sobre $[-2, 1]$. Estos intervalos de valores están todos en el eje y (eje vertical); imagínelos el lector.

Problema 3.- (2'5 puntos) *Hallar dos funciones continuas $g_1(x), g_2(x)$ tales que para todo número real x:*

$$\begin{cases} g_1(x) = \int_0^x (g_1(t) + g_2(t))\, dt - x^2/2, \\ g_2(x) = -\int_0^x g_2(t)\, dt - x. \end{cases}$$

SOLUCIÓN.- Por el teorema fundamental del cálculo infinitesimal, y por ser continuas las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$, derivando estas dos ecuaciones (respecto de x), obtenemos un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} g_1'(x) = g_1(x) + g_2(x) - x, \\ g_2'(x) = \qquad\quad -g_2(x) - 1. \end{cases}$$

Dando a x el valor 0, en las ecuaciones integrales de partida, obtenemos que

$$g_1(0) = 0, g_2(0) = 0.$$

Resolviendo el problema de condiciones iniciales que surge de esta manera, se obtiene que

$$g_1(x) = x + 2 - \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x},$$

$$g_2(x) = e^{-x} - 1.$$

Problema 4.- (2'5 puntos) *Se combinan M gramos de una sustancia química C con M gramos de una sustancia química D en un volumen de V litros de solución acuosa, para producir T y U de acuerdo con la reacción de segundo orden*

$$C + D \longrightarrow T + U.$$

Sea $x(t)$ la suma total de los gramos de C y D que han desaparecido (o reaccionado) al cabo de t minutos. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas:

(a) *Demostrar que*

$$\frac{dx}{dt} = K\left(M - \frac{m_C}{m_C + m_D}x\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C + m_D}x\right)$$

donde m_C y m_D son los pesos moleculares de C y D, respectivamente, y K es una constante positiva.

(b) *Demostrar que el número de gramos de T y U formados al cabo de t minutos son $m_T \cdot y(t)$ y $m_U \cdot y(t)$, en donde*

$$r := MK \cdot \frac{m_C - m_D}{m_C + m_D}, \qquad y(t) := M \cdot \frac{1 - e^{rt}}{m_D - m_C \cdot e^{rt}},$$

m_T, m_U son los pesos moleculares de T y U, y hemos supuesto que $m_C \neq m_D$. Adviértase que $m_C + m_D = m_T + m_U$.

SOLUCIÓN.- Primero digamos que este problema es de cinética química. En el bachillerato, sólo se estudia la química estática (equilibrio).

Por cada mol de C que desaparece, lo hace también un mol de D. Así, por cada mol que desaparece, se gastan $m_C + m_D$ gramos. Por lo tanto, si dividimos $x(t)$ gramos entre $m_C + m_D$ gramos, nos da el número de moles desaparecidos desde 0 hasta t:

$$y(t) = \frac{x(t)}{m_C + m_D}.$$

Es claro que M/m_C y M/m_D son los moles iniciales de C y D, respectivamente. Por la suposición $m_C \neq m_D$, estos números de moles son distintos. Si rige la reacción la ley de acción de masas (cinética), absorbiendo el volumen V en la constante k, se tiene que $y(t)$ verifica la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k\left(\frac{M}{m_C} - y\right)\left(\frac{M}{m_D} - y\right) \tag{1}$$

junto con la condición inicial $y(0) = 0$ (al principio no ha desaparecido ningún mol). Haciendo suscesivas operaciones elementales en esta ecuación,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{m_C m_D}\left(M - m_C y\right)\left(M - m_D y\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{m_C m_D}\left(M - \frac{m_C}{m_C+m_D}(m_C+m_D)y\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C+m_D}(m_C+m_D)y\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{m_C m_D}\left(M - \frac{m_C}{m_C+m_D}x\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C+m_D}x\right),$$

y puesto que

$$y(t) = \frac{x(t)}{m_C+m_D} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{m_C+m_D},$$

se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(m_C+m_D)}{m_C m_D}\left(M - \frac{m_C}{m_C+m_D}x\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C+m_D}x\right);$$

y llamando

$$K := \frac{k(m_C+m_D)}{m_C m_D},$$

se sigue que

$$\frac{dx}{dt} = K\left(M - \frac{m_C}{m_C+m_D}x\right)\left(M - \frac{m_D}{m_C+m_D}x\right). \qquad (2)$$

Lo que prueba (a).

Obsérvese que durante los t primeros minutos han desaparecido

$$m_C \cdot \frac{x(t)}{m_C+m_D} \quad \text{gramos de } C$$

y

$$m_D \cdot \frac{x(t)}{m_C+m_D} \quad \text{gramos de } D.$$

(b) Para demostrar este apartado, resolvemos la ecuación diferencial (1), junto con la condición inicial $y(0) = 0$; lo que, de acuerdo con la solución de la ecuación que se da en el Fascículo 7º, nos lleva a:

$$y(t) = \frac{\frac{M}{m_C}\frac{M}{m_D}\left[1 - e^{(M/m_D - M/m_C)kt}\right]}{\frac{M}{m_C} - \frac{M}{m_D}e^{(M/m_D - M/m_C)kt}};$$

Haciendo operaciones, de aquí se llega a:

$$y(t) = \frac{M\left[1 - e^{tMk(m_C-m_D)/m_D m_C}\right]}{m_D - m_C e^{tMk(m_C-m_D)/m_D m_C}}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{K}{m_C + m_D} = \frac{k}{m_C m_D},$$

deducimos de la última ingualdad que

$$y(t) = \frac{M\left[1 - e^{tMK(m_C - m_D)/(m_C + m_D)}\right]}{m_D - m_C e^{tMK(m_C - m_D)/(m_C + m_D)}} \text{moles.}$$

Si ahora definimos

$$r := MK \cdot \frac{m_C - m_D}{m_C + m_D},$$

se consigue acabar de probar que

$$y(t) = M \cdot \frac{1 - e^{rt}}{m_D - m_C \cdot e^{rt}},$$

y —como $y(t)$ son los moles de T y de U que han aparecido— $m_T \cdot y(t)$ y $m_U \cdot y(t)$ son los gramos de T y U formados al cabo de t minutos de reacción.

Nota.- A este resultado también se podría haber llegado resolviendo directamente la ecuación diferencial (2) , junto con la condición inicial $x(0) = 0$.

Problema 5.- (2'5 puntos) *Se consideran tres depósitos interconectados de capacidad* 100 *litros entre los que circula una mezcla —bien agitada— de tres líquidos* A, B *y* C. *Las cantidades iniciales, en litros, de los líquidos* A, B *y* C *en cada uno de los tres depósitos vienen dadas por la tabla:*

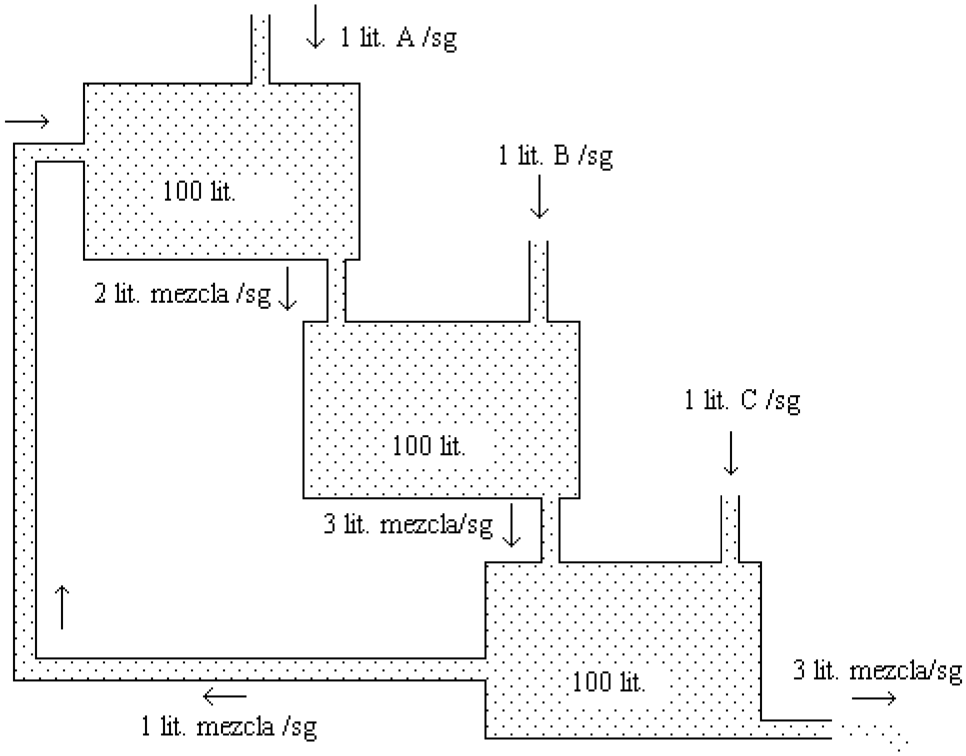
Líquido	A	B	C
depósito 1^o	a_1	b_1	c_1
depósito 2^o	a_2	b_2	c_2
depósito 3^o	a_3	b_3	c_3

donde, naturalmente, $a_i + b_i + c_i = 100$ *litros para* $i = 1, 2, 3$.

Desde el exterior penetra 1 *litro de líquido* A *por segundo en el depósito* 1^o, 1 *litro de líquido* B *por segundo en el depósito* 2^o *y* 1 *litro de líquido* C *por segundo en el depósito* 3^o. *Al exterior fluyen* 3 *litros de mezcla por segundo desde el depósito* 3^o. *La información restante viene dada en la figura que sigue.*

1^o**.- Plantear** *los sistemas de ecuaciones diferenciales que sirven como modelos matemáticos para estudiar la evolución de los litros de* A, B *y* C *en cada uno de los tres depósitos en el transcurso del tiempo* t *— medido en segundos.* No resolver estas ecuaciones diferenciales.

2^o**.-** *¿Habrá unas condiciones iniciales* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ *que permitan que el número de litros de* A, B *y* C *en cada depósito permanezca constante? (Estado estacionario del sistema). En caso de respuesta afirmativa, hallarlas.*



SOLUCIÓN.-
(1º)
Líquido A: Sean $x_i(t)$ los litros de líquido A que hay en el depósito i-ésimo a los t segundos de comenzar el bombeo ($i = 1, 2, 3$). Entonces por el principio fundamental que nos lleva a igualar la derivada de la función $x_i(t)$ a la diferencia entre la cantidad de líquido A que entra en el depósito i-ésimo por segundo y la cantidad de líquido A que sale del depósito i-ésimo por segundo, se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{lcllll} x_1'(t) & = & -\frac{x_1(t)}{100}\cdot 2 & & +\frac{x_3(t)}{100} & +1 \\ x_2'(t) & = & \frac{x_1(t)}{100}\cdot 2 & -\frac{x_2(t)}{100}\cdot 3 & & \\ x_3'(t) & = & & \frac{x_2(t)}{100}\cdot 3 & -\frac{x_3(t)}{100}\cdot 4 & \end{array}\right. \tag{3}$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por $x_1(0) = a_1, x_2(0) = a_2, x_3(0) = a_3$.

Lo que podemos escribir matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{100} & 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & -\frac{3}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & -\frac{4}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

De manera análoga, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales para los líquidos B y C.

Líquido B: Sean $y_i(t)$ los litros de líquido B que hay en el depósito i-ésimo a los t segundos de comenzar el bombeo ($i = 1, 2, 3$). Entonces por el principio fundamental que nos lleva a igualar la derivada de la función $y_i(t)$ a la diferencia entre la cantidad de líquido B que entra en el depósito i-ésimo por segundo y la cantidad de líquido B que sale del depósito i-ésimo por segundo, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & -\frac{y_1(t)}{100} \cdot 2 & & +\frac{y_3(t)}{100} & \\ y_2'(t) & = & \frac{y_1(t)}{100} \cdot 2 & -\frac{y_2(t)}{100} \cdot 3 & & +1 \\ y_3'(t) & = & & \frac{y_2(t)}{100} \cdot 3 & -\frac{y_3(t)}{100} \cdot 4 & \end{array} \right. \tag{5}$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por $y_1(0) = b_1, y_2(0) = b_2, y_3(0) = b_3$. Lo que podemos escribir matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{100} & 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & -\frac{3}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & -\frac{4}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Líquido C: Sean $z_i(t)$ los litros de líquido C que hay en el depósito i-ésimo a los t segundos de comenzar el bombeo ($i = 1, 2, 3$). Entonces por el principio fundamental que nos lleva a igualar la derivada de la función $z_i(t)$ a la diferencia entre la cantidad de líquido C que entra en el depósito i-ésimo por segundo y la cantidad de líquido C que sale del depósito i-ésimo por segundo, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} z_1'(t) & = & -\frac{z_1(t)}{100} \cdot 2 & & +\frac{z_3(t)}{100} & \\ z_2'(t) & = & \frac{z_1(t)}{100} \cdot 2 & -\frac{z_2(t)}{100} \cdot 3 & & \\ z_3'(t) & = & & \frac{z_2(t)}{100} \cdot 3 & -\frac{z_3(t)}{100} \cdot 4 & +1 \end{array} \right. \tag{7}$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por $z_1(0) = c_1, z_2(0) = c_2, z_3(0) = c_3$. Lo que podemos escribir matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{100} & 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & -\frac{3}{100} & 0 \\ 0 & \frac{3}{100} & -\frac{4}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Observemos que los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales son no homogéneos. Lo que traduce a términos matemáticos que existe sobre el "sistema físico" influencia desde el exterior. Sin embargo, la "parte homogénea" de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es la misma para los tres líquidos; esto es debido a que esta parte sólo depende de las condiciones (capacidades de los tanques, velocidades de flujo) del "sistema" de los tres depósitos interconectados.

(2°)

¿Habrá soluciones constantes del sistema (4)? Esto equivale a preguntar si existirán unos números a_1, a_2, a_3 tales que las funciones constantes $x_1(t) = a_1, x_2(t) = a_2, x_3(t) = a_3$ para todo $t \in [0, \infty)$, nos den una solución

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

del sistema. Como la derivada de una función constante es igual a cero, los valores de a_1, a_2, a_3, que buscamos, deberán verificar la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Como

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0, \tag{11}$$

se sigue que el sistema de ecuaciones (10) en las incógnitas a_1, a_2, a_3, tiene solución única. Resolvamos este sistema

$$\begin{aligned} -2a_1 \qquad + a_3 &= -100 \\ 2a_1 - 3a_2 \qquad &= 0 \\ 3a_2 - 4a_3 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

por eliminaciones sucesivas. Sumando las dos primeras ecuaciones de (12) se tiene que $-3a_2 + a_3 = -100$; lo que junto con la tercera ecuación nos da:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} -3a_2 + a_3 & = & -100 \\ 3a_2 - 4a_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos $-3a_3 = -100$; de donde,

$$a_3 = \frac{100}{3}.$$

De $3a_2 = 4a_3 = 4 \cdot \frac{100}{3}$, se sigue que

$$a_2 = \frac{4 \cdot 100}{9} = \frac{400}{9}.$$

Finalmente, de aquí, $2a_1 = 3a_2 = 3 \cdot \frac{400}{9} = \frac{400}{3}$. Lo que implica

$$a_1 = \frac{200}{3}.$$

Aproximadamente,

$$a_1 = 66'66, \qquad a_2 = 44'44, \qquad a_3 = 33'33.$$

Análogamente se obtienen los sistemas que nos dan las soluciones constantes $y_1(t) = b_1, y_2(t) = b_2, y_3(t) = b_3, \qquad z_1(t) = c_1, z_2(t) = c_2, z_3(t) = c_3$ para todo $t \in [0, \infty)$, de los sistemas (6) y (8), respectivamente:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones respectivas son

$$b_1 = \frac{100}{6} \simeq 16'66, \quad b_2 = \frac{400}{9} \simeq 44'44, \quad b_3 = \frac{100}{3} \simeq 33'33.$$

$$c_1 = \frac{100}{6} \simeq 16'66, \quad c_2 = \frac{100}{9} \simeq 11'11, \quad c_3 = \frac{100}{3} \simeq 33'33.$$

Veamos si estos números, cumplen unas condiciones obvias: ¡La suma de los tres líquidos A, B y C en cada depósito debe ser igual a 100 litros!

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{200}{3} + \frac{100}{6} + \frac{100}{6} = \frac{400 + 100 + 100}{6} = \frac{600}{6} = 100,$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = \frac{400}{9} + \frac{400}{9} + \frac{100}{9} = \frac{900}{9} = 100,$$

y

$$a_3 + b_3 + c_3 = \frac{100}{3} + \frac{100}{3} + \frac{100}{3} = 100.$$

Sin embargo, $a_1 + a_2 + a_3 = 66'66 + 44'44 + 33'33 = 144'43$, $b_1 + b_2 + b_3 = 16'66 + 44'44 + 33'33 = 94'43$ y $c_1 + c_2 + c_3 = 16'66 + 11'11 + 33'33 = 61'1$. Las cantidades totales de A, B y C dan números diferentes. He aquí un resultado parádojico, pues si miramos el "sistema" de los tres tanques interconectados como un "solo" depósito al que entran desde el exterior 3 litros (uno de A, otro de B y otro de C) y del que salen 3 litros de mezcla, parecería natural que en todo el sistema hubiera 100 litros de A, 100 litros de B y 100 litros de C. ¿Cuál es la explicación de esta aparente contradicción?