Matemática Aplicada: Soluciones esquemáticas

Grupo 01 de 1^o de Farmacia, 6 de septiembre de 1999, Examen

Importante.- Contestar solamente a 4 ejercicios de los 5 propuestos.
No obstante, si se prefiere, pueden entregarse respuestas a los 5 ejercicios; en cuyo caso, la nota obtenida será la suma de las 4 notas de ejercicio más altas.

Cuestión 1.- (2'5 puntos) *Interpretación geométrica del teorema del valor medio para derivadas: Se considera la recta tangente a la curva ...*

SOLUCIÓN.- El teorema del valor medio para derivadas dice que si $f(x)$ es una función real definida y continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y es derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, entonces existe al menos un punto x_0 en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Este resultado es obvio si consideramos que la pendiente m de la recta tangente $y = mx + b$ a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, es igual a $f'(x_0)$.

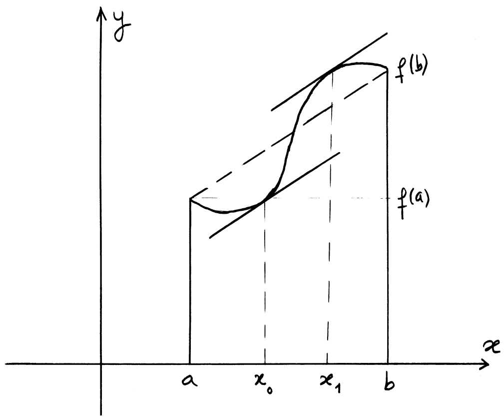

Figura 1: Teorema del valor medio

Viendo la figura 1 resulta obvio que debe haber un punto (al menos) en la curva $y = f(x)$ en el que la tangente es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. De hecho, en la figura 1, se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) = f'(x_1).$$

Problema 2.- (2'5 puntos) *Decir todo lo que se pueda de la gráfica* $y = F(x)$ *de la función*

$$F(x) := \int_1^x f(t)\, dt$$

sabiendo que la gráfica de $f : [1,7] \to \mathbb{R}$ *es*

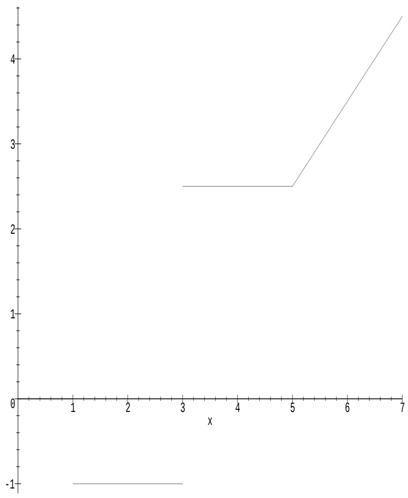

Figura 2: Gráfica de $f(x)$

Solución.- En las figuras 2 y 3 podemos observar los siguientes hechos. Por definición $\int_1^1 f(t)\, dt = 0$; por lo que $F(1) = 0$. Para x comprendido entre 1 y 3, el valor $F(x)$ representa el área de un rectángulo situado por debajo del eje x; por lo tanto, $F(x)$ tiene un valor negativo. Además, por ser constante $f(x) \equiv c_1$ en el intervalo $1 \leq x \leq 3$, la gráfica de la función $F(x)$ es una recta de pendiente negativa c_1.

La función $F(x)$ es continua en $x = 3$, aunque $f(x)$ no lo es. Pero la función $F(x)$ no es derivable en dicho punto.

Como el valor de $f(x)$ en el intervalo $3 \leq x \leq 5$ es constante y positivo, digamos $f(x) \equiv c_2$, se tiene que la gráfica de $F(x)$ es una recta de pendiente c_2 allí. En consecuencia la función $F(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 3$; de hecho, como su derivada $F'(x)$ es positiva en el intervalo $(3, 7)$, pues es igual a $f(x)$, se sigue que $F(x)$ tiene su mínimo absoluto en $x = 3$.

Resumiendo, la función $F(x)$ es decreciente en
$[1, 3]$ y creciente en $[3, 7]$.

La función $F(x)$ es derivable en $x=5$, pues $f(x)$ es continua en él. Esto se traduce en que la curva $y=F(x)$ no tiene un punto anguloso.

La función $f(x)$ es igual a $mx+b$ en $(5,7)$ con $m>0$. Por lo cual $F'(x) = mx+b$ y $F''(x)=m$; en consecuencia, $F(x)$ es convexa en $[5,7]$. En sentido amplio, $F(x)$ es convexa en $[3,7]$.

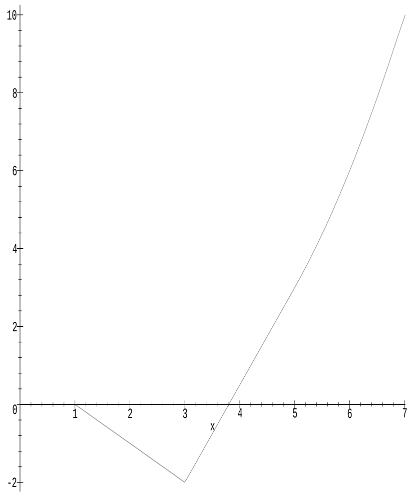

Figura 3: Gráfica de $F(x)$

Problema 3.- (2'5 puntos) *Hallar el valor mínimo que puede tomar la integral*

$$\int_0^1 [x(t)]^2\, dt,$$

cuando $x(t)$ recorre el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - 2.$$

Solución.- Sea x_0 un número real cualquiera. Las propiedades de la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dependen del valor x_0. Expresemos la integral $I(x_0) := \int_0^1 [x(t)]^2\,dt$ en función de x_0. Después hallaremos el valor de x_0 que hace mínimo el valor de la función $I(x_0)$.

La solución de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

es la función

$$x(t) = 2 + (x_0 - 2)e^t.$$

De donde se deduce que

$$I(x_0) = \frac{e^2 - 1}{2} x_0^2 + 2(2e - 1 - e^2)x_0 + (2e^2 + 10 - 8e).$$

La función $I(x_0)$ es una función cuadrática en x_0. Para hallar su valor mínimo hallamos su primera y segunda derivadas respecto de x_0:

$$I'(x_0) = (e^2 - 1)x_0 + 2(2e - 1 - e^2), \quad I''(x_0) = e^2 - 1.$$

Resolvemos la ecuación

$$(e^2 - 1)x_0 + 2(2e - 1 - e^2) = 0;$$

su solución es

$$x_0 = \frac{2(1 + e^2 - 2e)}{e^2 - 1}.$$

Como $I''(x_0) = e^2 - 1$, se tiene que $I''(x_0) > 0$. Por lo tanto, la función $I(x_0)$ tiene un mínimo en

$$x_0 = \frac{2(1 + e^2 - 2e)}{e^2 - 1} = 0'9242.$$

Ya que se trata de una función cuadrática, el valor de $I(x_0)$ en este x_0 es su mínimo absoluto:

$$\min_{x_0 \in \mathbb{R}} I(x_0) = 4\frac{3 - e}{e + 1} = 0'3031.$$

Problema 4.- (2'5 puntos) *En un depósito que contiene* 20 *kg de sal en* 100 *litros de solución se vierte 1 litro de agua pura por minuto. La mezcla (homogénea) que se forma se derrama a la misma velocidad en otro depósito de* 200 *litros lleno inicialmente de agua con* 4 *kg de sal, saliendo igualmente el exceso de líquido de éste por un orificio inferior (ver figura 4).*

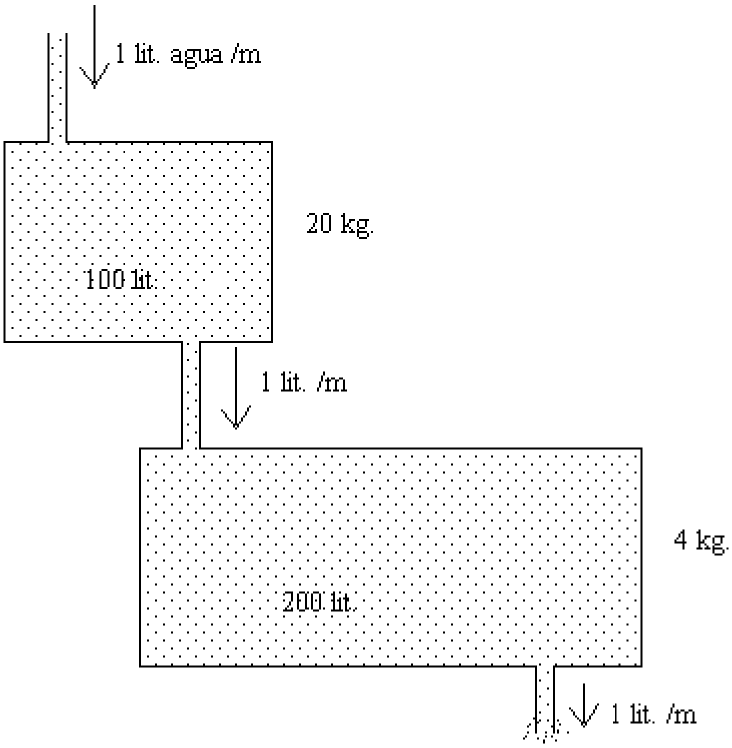

Figura 4: Depósitos con agua y sal

- *Hallar la cantidad de sal presente en ambos depósitos a los t minutos de empezar el bombeo.*
- *¿Hay algún momento en que la cantidad de sal en ambos depósitos sea igual? ¿cuál sería esa cantidad?*

SOLUCIÓN.- Sean $x_i(t)$ los kilos de sal presentes en el depósito i–ésimo ($i = 1, 2$) a los t minutos de comenzar el bombeo. Aunque es obvio, llamaremos depósito 1º al de arriba y depósito 2º al de abajo en la figura 4.

Aplicando el principio fundamental de conservación de sal, se obtiene el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\dfrac{x_1(t)}{100} \\ x_1(0) = 20 \end{cases}$$

como modelo matemático del depósito 1º. Resolviendo este problema obtenemos la solución

$$x_1(t) = 20\exp(-t/100).$$

Teniendo en cuenta este resultado, como ecuación diferencial para el 2º depósito tenemos

$$x_2'(t) = -\frac{x_2(t)}{200} + \frac{20}{100}\exp(-t/100);$$

que, simplificada, queda así

$$x_2'(t) = -\frac{x_2(t)}{200} + \frac{1}{5}\exp(-t/100);$$

la solución de esta ecuación que verifica la condición inicial $x_2(0) = 4$, es

$$x_2(t) = -40\exp(-t/100) + 44\exp(-t/200).$$

Esto contesta a la primera pregunta. Las gráficas de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ pueden verse en la figura 5.

Para contestar la segunda pregunta, debemos averiguar si existe una solución positiva de la ecuación en la incógnita t:

$$x_1(t) = x_2(t);$$

es decir, hay que resolver la ecuación

$$20\exp(-t/100) = -40\exp(-t/100) + 44\exp(-t/200).$$

La solución es

$$200\ln(15/11) = 62'0310 \text{ minutos}.$$

En ese momento la cantidad de sal en los dos depósitos es la misma: $x_1(62'0310) = x_2(62'0310) = 10'7556$ kgs. En la figura 5 puede verse que las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se cortan en el punto $(62'0310, 10'7556)$.

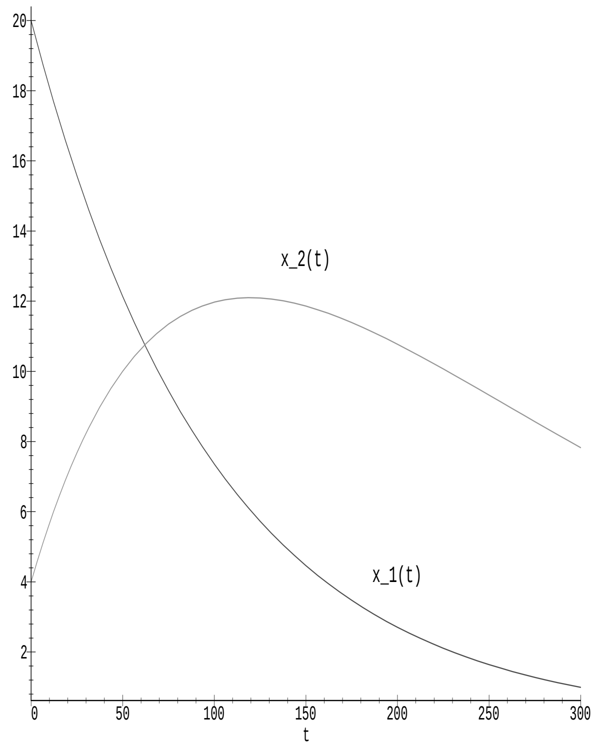

Figura 5: Gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$

Problema 5.- (2'5 puntos) *Supongamos que x_0 bacterias se ponen en una solución nutritiva en el instante $t = 0$ y que $x(t)$ es el número de bacterias del cultivo en un momento posterior t. Si el espacio es limitado y los alimentos se suministran de manera regular, la competencia por los alimentos y el espacio actuarán de tal modo que la población se estabilizará en N bacterias. Plantear (y resolver) una ecuación diferencial que pueda servir de modelo matemático para este fenómeno de manera que la solución que verifique la condición inicial $x(0) = x_0$ sea la función*

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-kNt}}$$

donde k es una constante positiva. Dibujar la gráfica de $x(t)$.

SOLUCIÓN.- Suponemos que cada bacteria da lugar a dos bacterias y que, así, por bipartición se reproducen. Entonces, si no hubiera limitación de espacio el número de bacterias $x(t)$ crecería a una velocidad proporcional al número de bacterias presentes en cada instante:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante positiva. Pero existe una limitación de espacio, que se traduce en que el número máximo posible de bacterias es N. Así cuando $x(t)$ vaya creciendo y aproximándose a N la velocidad (derivada) de crecimiento de $x(t)$ deberá ir tendiendo a 0. Esto hace factible el plantear la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

como modelo matemático de la situación. (Como siempre la última palabra sobre la validez de un modelo, la tiene el acuerdo entre los resultados que predice y las medidas experimentales).

Esta es una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución viene dada integrando los dos miembros de la ecuación

$$\frac{dx}{x(N - x)} = k\,dt,$$

y así obtenemos

$$\int \frac{dx}{x(N - x)} = \int k\,dt + k_0.$$

Para hacer la integral del lado izquierdo, descomponemos en fracciones simples la fracción racional

$$\frac{1}{x(N - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{N - x};$$

de donde,

$$1 = A(N - x) + Bx; \Rightarrow AN = 1, -A + B = 0 \Rightarrow A = 1/N, B = 1/N.$$

De aquí que

$$\int \frac{dx}{x(N-x)} = \frac{1}{N}\left[\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{N-x}\right] = kt + k_0;$$

$$\frac{1}{N}[\ln \mid x \mid - \ln \mid N-x \mid] = kt + k_0;$$

$$\ln\left|\frac{x}{N-x}\right| = kNt + k_0 N;$$

$$\left|\frac{x}{N-x}\right| = k_1 \exp(kNt) \quad \text{para una cierta } k_1 \tag{1}$$

dando a t el valor 0 en esta última expresión obtenemos

$$\left|\frac{x_0}{N-x_0}\right| = k_1. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) resulta que

$$\frac{\dfrac{x}{N-x}}{\dfrac{x_0}{N-x_0}} = \exp(kNt)$$

o su equivalente

$$\frac{x}{N-x} = \frac{x_0}{N-x_0}\exp(kNt);$$

lo que sucesivamente da

$$x(N-x_0) = Nx_0 \exp(kNt) - xx_0 \exp(kNt);$$

$$x[N - x_0 + x_0 \exp(kNt)] = Nx_0 \exp(kNt);$$

$$x = \frac{Nx_0 \exp(kNt)}{N - x_0 + x_0 \exp(kNt)}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción del segundo miembro de esta ecuación, resulta

$$x(t) = \frac{Nx_0}{(N-x_0)\exp(-kNt) + x_0};$$

como queríamos probar. Esta función $x(t)$ es creciente, pues $\exp(-kNt)$ es decreciente y está en el denominador de la fórmula que define a $x(t)$; corroboraremos esto enseguida con el signo de la derivada primera.

Vemos que

$$x(0) = \frac{Nx_0}{x_0 + N - x_0} = x_0,$$

y que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{Nx_0}{x_0} = N;$$

como era de esperar.

La derivada primera de $x(t)$ es

$$x'(t) = Nx_0 \cdot \frac{-(-kN)(N - x_0)\exp(-kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2};$$

por tanto,

$$x'(t) = Nx_0 \frac{kN^2x_0(N - x_0)\exp(-kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2};$$

de aquí se deduce que cuando $N > x_0$, el valor de $x'(t)$ es positivo para todo $t \in [0, \infty)$. Por consiguiente, es este caso, $x(t)$ es creciente en $[0, \infty)$.

Hallemos ahora la derivada segunda de $x(t)$.

$$\begin{aligned} x''(t) = & \\ & \frac{-kN \cdot kN^2x_0(N - x_0)\exp(-kNt)[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^4} \\ & -\frac{2[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)](-kN)(N - x_0) \cdot kN^2x_0(N - x_0)\exp(-kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^4}. \end{aligned}$$

Deseamos averiguar cuándo es $x''(t) < 0$. Observamos que $x''(t) < 0$ si y sólo si

$$-k^2N^3x_0(N - x_0)\exp(kNt)[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)] + 2k^2N^3x_0(N - x_0) < 0;$$

que es equivalente a que

$$-k^2N^3x_0^2(N - x_0)\exp(kNt) + k^2N^3x_0(N - x_0)^2 < 0;$$

y esta desigualdad es cierta si y sólo si

$$k^2N^3x_0(N - x_0)[(N - x_0) - x_0\exp(kNt)] < 0 \tag{3}$$

es verdadera. Pero esta desigualdad es equivalente a que el corchete [...] de (3) sea menor que cero.

¿Pará qué valor de t se hace cero [...] y, por lo tanto, $x''(t)$? Este corchete [...] se hace cero si

$$N - x_0 = x_0 \exp(kNt);$$

es decir, si

$$\frac{N - x_0}{x_0} = \exp(kNt);$$

resolviendo esta última ecuación en la incógnita t, obtenemos el valor

$$t_1 = \frac{1}{kN} \ln \frac{N - x_0}{x_0}.$$

Ahora bien, $\ln x$ es mayor que 0 si y sólo si $x > 1$; esto quiere decir que para que t_1 sea > 0 debe ser

$$\frac{N - x_0}{x_0} > 1;$$

o bien

$$N > 2x_0.$$

Concluímos que si $N > 2x_0$ la función $x(t)$ tiene un punto de inflexión en t_1. Véase la figura 6. Obsérvese que la función crece al principio más lentamente; después tiene una zona de crecimiento rápido (crecimiento exponencial); finalmente se hace lento el crecimiento y la función tiende asintóticamente a N cuando $t \to \infty$. Esta curva es denominada a veces **curva logística** del crecimiento de una población.

Por el contrario, si $N \leq 2x_0$, la función $x(t)$ es cóncava en todo el intervalo $[0, \infty)$ y no tiene punto de inflexión; ya que $N \leq 2x_0$ implica que $N - x_0 \leq x_0; \Rightarrow (N - x_0)/x_0 \leq 1$. De aquí que

$$\ln \frac{N - x_0}{x_0} \leq 0;$$

si $t > 0$, entonces

$$\frac{1}{kN} \ln \frac{N - x_0}{x_0} \leq 0 < t; \Rightarrow \ln \frac{N - x_0}{x_0} < kNt,$$

$$\Downarrow$$

$$N - x_0 < x_0 \exp(kNt).$$

Esto implica que $x''(t) < 0$. Véase la figura 7 . Suponemos en todo momento que $x_0 < N$.

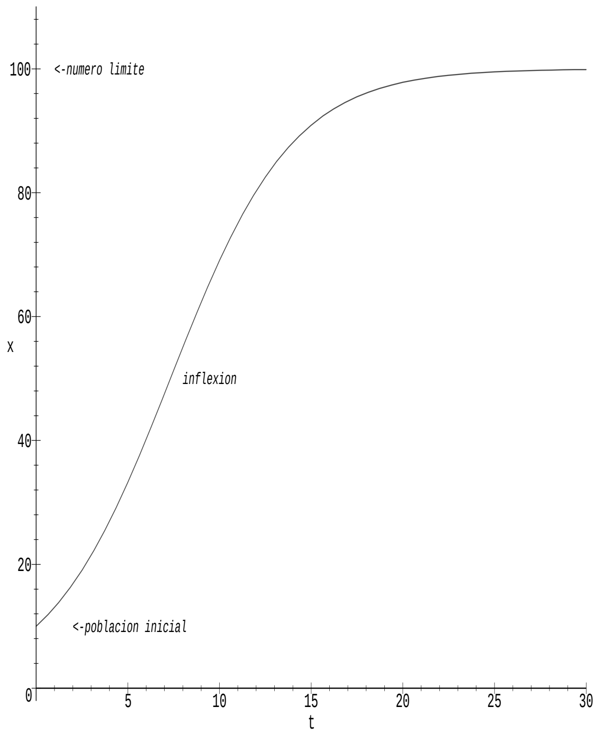

Figura 6: Gráfica de $x(t)$ cuando $N > 2x_0$

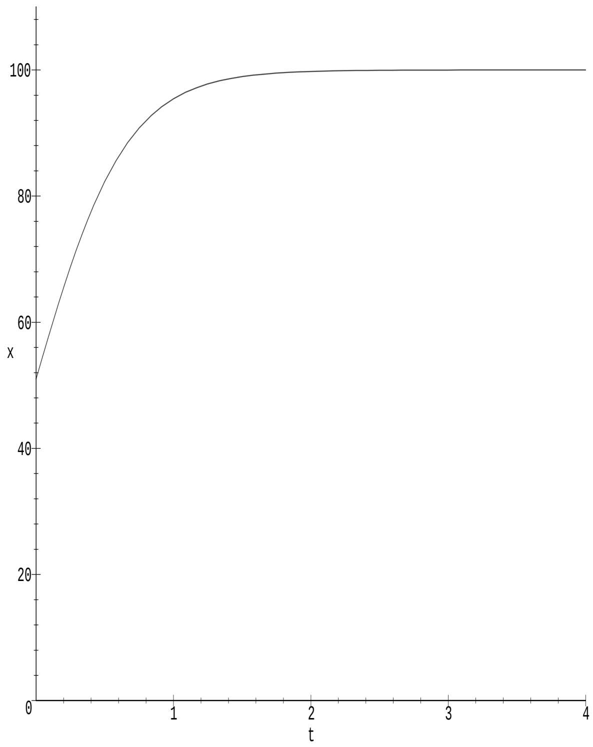

Figura 7: Gráfica de $x(t)$ cuando $N \leq 2x_0$