Matemática Aplicada
Grupo 01 de Primero de Farmacia
Fascículo 1^o

Profesor Juan-Miguel Gracia

27 de septiembre de 1999

Capítulo 1

Repaso del Cálculo Infinitesimal

1.1 Preliminares Matemáticos

Se necesitará que el alumno conozca los teoremas siguientes del Cálculo Infinitesimal de funciones reales de una variable real.

Teorema 1 (Teorema del valor intermedio).
Sea f *una función real continua en el intervalo* $[a, b]$. *Si* $f(a) < f(b)$ *y* c *es un número tal que* $f(a) < c < f(b)$, *entonces existe un punto* $x_0 \in (a, b)$ *tal que* $f(x_0) = c$.

Observación.- Evidentemente, se mantiene un resultado similar si $f(a) > f(b)$.

Teorema 2 (Teorema de valor medio para derivadas).
Si f *es una función real continua en* $[a, b]$, *que es derivable en* (a, b), *entonces existe un punto* $x_0 \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(x_0).$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio para derivadas

Este resultado es obvio si consideramos que la pendiente m de la recta tangente $y = mx + b$ a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, es igual a $f'(x_0)$.

Viendo la figura 1.2 resulta obvio que debe haber un punto (al menos) en la curva $y = f(x)$ en el que la tangente es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. De hecho, en la figura 1.2, se tiene que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) = f'(x_1).$$

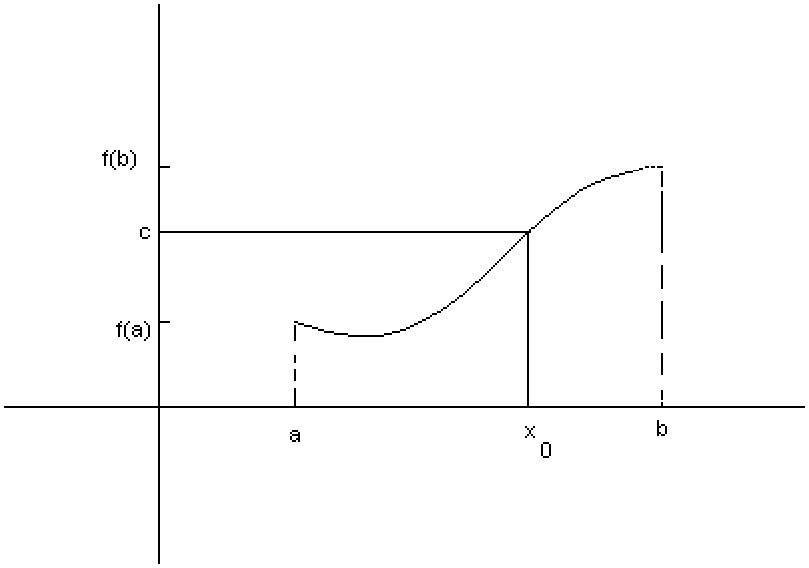


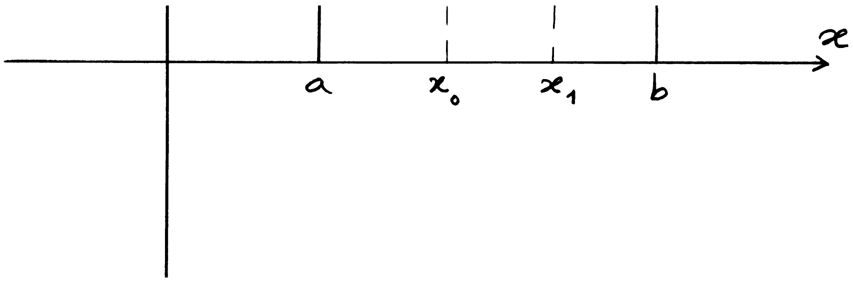
Figura 1.1: Teorema del valor intermedio

Interpretación cinemática del teorema del valor medio para derivadas

Una interpretación cinemática de este teorema es que la velocidad media de un coche en un trayecto es igual a su velocidad instantánea en cierto instante: Supongamos que un coche va por una autopista desde el punto A hasta el punto B. Sean $f(t)$ los kilómetros que ha recorrido el coche desde A hasta el tiempo t —medido en horas. La derivada de esta función $v(t) := f'(t)$ es la velocidad (instantánea) del coche en el momento t. Supongamos que desde A hasta B hay una distancia de 230 km. y que el coche tarda 2 horas en hacer este recorrido. Entonces la velocidad media del coche en este trayecto total es de $230/2 = 115$ km/h. El teorema del valor medio implica que al menos en algún instante t_0 la velocidad del coche ha sido exactamente igual a 115 km/h: $v(t_0) = 115$, pues existe un $t_0 \in (0, 2)$ tal que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(t_0)$$

Este hecho matemático resulta evidente a partir de nuestra experiencia como viajeros de coches. Pues si nuestro coche nunca hubiera ido a 115 km/h sería porque siempre habría ido a una velocidad mayor que 115 km/h, o a una velocidad menor que 115 km/h. No podría ser que hubiera ido todo el rato


x
a
x_0
x_1
b