Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una ecuación diferencial es una ecuación cuya incógnita es una *función* que aparece junto con su(s) derivada(s) y funciones conocidas. Si la incógnita es una función real de una variable real, la ecuación diferencial se llama *ordinaria*. Cuando la incógnita es una función real de dos o más variables reales la ecuación diferencial se llama *en derivadas parciales*. Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias lo son:

$$x' = t^2 x + \cos t; \qquad \frac{dx}{dt} = e^t x^2 + \operatorname{sen}(x^2);$$

$$y' = 3xy + x^4; \qquad \frac{dy}{dx} = 3xy + x^4; \qquad dy - (3xy + x^4)dx = 0;$$

$$x'' + (x')^3 - (3t^2 + 7)x = 0;$$

$$(2x^2 + xy^2 + \cos xy)dx + (6x^3y^2 - 2)dy = 0.$$

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2)u;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Resolver una ecuación diferencial es buscar funciones que la satisfagan para todos los valores posibles de las variables independientes. Por ejemplo, una solución de la ecuación $x' = t^2 x + \cos t$ es una función derivable $v(t)$ tal que para todo valor real de t donde esté definida $v(t)$ se verifique que

$$v'(t) = t^2 v(t) + \cos t.$$

Si $u(x, y)$ es una función real de las variables reales x, y, la derivada parcial $\partial u/\partial x$ se obtiene derivando $u(x, y)$ respecto de x, como si y fuera una constante o un parámetro. Por ejemplo, si $u(x,y) := 3x^2y^4 + \operatorname{sen}(xy)$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^4 + y\cos(xy).$$

La derivada $\partial u/\partial y$ se obtiene de manera análoga:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y^3 + x\cos(xy).$$

En general no se puede resolver una ecuación diferencial de manera exacta mediante soluciones que sean funciones *elementales*. Pero, en muchas ocasiones, sólo importa conocer algunas propiedades o comportamientos de la función solución en la que estemos interesados. Por ejemplo, podría interesarnos saber si la solución $v(t)$ de la ecuación diferencial $x'' + (x')^3 - (3t^2+7)x = 0$ que verifica las condiciones iniciales $x(1) = 2, x'(1) = 4$ tiene límite cuando $t \to \infty$. Caso de existir este límite, quizás querríamos hallar su valor

$$\lim_{t\to\infty} v(t),$$

aun sin conocer $v(t)$ explícitamente. Y, si esto fuera difícil o imposible, saber si la afirmación

$$\lim_{t\to\infty} v(t) < 300$$

es cierta o no.

Muchas veces, se procede a resolver *numéricamente* la ecuación diferencial; lo que equivale a decir que se halla una *tabla de valores* de la función solución.

¿En qué parte de las Matemáticas están ubicadas las ecuaciones diferenciales?

Las ecuaciones diferenciales están dentro del Análisis Matemático o Cálculo Infinitesimal. El Cálculo Infinitesimal trata de las relaciones entre derivadas e integrales. Ya hemos visto en el bachillerato los límites, las derivadas y las integrales

$$\lim_{n\to\infty} a_n; \qquad \lim_{x\to x_0} f(x); \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}; \qquad \int f(x)\,dx; \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es posible estudiar bastantes aspectos de las ecuaciones diferenciales ordinarias después de estos conceptos.

Modelos Matemáticos

Dado que las ecuaciones diferenciales aparecen de modo natural como mode-los matemáticos para analizar problemos del mundo físico, químico, biológico, etc. empezaremos dedicando unos párrafos a esta cuestión general y muy importante.

Hoy en día todo el mundo habla de modelos matemáticos. Aparecen por doquier. Lo curioso del caso es que siempre han estado presentes en todas las ciencias que emplean las matemáticas. Pero en los últimos veinticinco años se ha reconocido la necesidad de dedicarles una atención específica en la enseñanza, habiéndose impartido muchos cursos sobre *Modelación Matemática*.

Un examen de los orígenes de cualquier campo científico, ya sea astronomía, física o psicología, indica que la disciplina empezó con una enorme masa de observaciones y experimentos. Es natural, por tanto, que las primeras etapas al cuantificar el tema acarrean la recolección, la representación y el tratamiento de datos. En consecuencia, el estudio de la estadística ha jugado un papel importante en la preparación matemática de los estudiantes que trabajan en áreas cuantitativas de las ciencias biológicas o sociales. Un tratamiento de datos puede ser bastante elemental, suponiendo poco más que un listado, una clasificación y unos pocos cálculos directos. Puede ser también sofisticado, implicando ideas matemáticas sustanciales y problemas delicados de diseño de experimentos. Una vez que han sido recogidos suficientes datos y analizados adecuadamente, el investigador trata de imaginar un proceso que justifique estos resultados. Es esta actividad, la creación mental de un sistema con papel-y-lápiz, la que vamos a comentar. En la literatura científica, esta actividad es conocida comúnmente como la construcción y el análisis de una teoría. Nos referiremos a ella como la construcción, desarrollo y estudio de los modelos matemáticos.

El problema original surge casi siempre en el *mundo real*, algunas veces en las condiciones relativamente bajo control de un laboratorio y a veces en el medio ambiente, mucho menos comprendido. Por ejemplo, un psicólogo observa ciertos tipos de comportamiento en las ratas que corren por un laberinto, un especialista en genética anota los resultados de un experimento de hibridación, o un economista registra el volumen del comercio internacional bajo una política específica de aranceles, y luego cada uno conjetura ciertas razones que expliquen sus observaciones. Estas conjeturas pueden estar basadas completamente en la intuición, pero más a menudo son el resultado de un estudio detallado y del reconocimiento de algunas analogías con otras situaciones que se comprenden mejor. Este estudio minucioso del sistema, que precede a la formación de las conjeturas, es la primera etapa en la construcción del modelo. Mucho de este trabajo inicial debe ser hecho por un investigador que esté familiarizado con el origen del problema y con la psicología, biología, economía, o lo que quiera que sea.

La siguiente etapa es un intento para plantear el problema de modo tan preciso como sea posible. Con esto se quiere decir llegar a una comprensión clara y definida de las palabras y de los conceptos utilizados. Este proceso supone hacer típicamente ciertas idealizaciones y aproximaciones. Un aspecto importante de esta etapa es el intento de identificar y seleccionar aquellos conceptos que se consideren básicos para el estudio. El propósito aquí es eliminar la información irrelevante y simplificar la que se vaya a retener tanto como sea posible. Por ejemplo, en relación con el psicólogo que estudia las ratas en un laberinto, el experimentador puede decidir que no tiene ninguna importancia que todas las ratas sean grises o que el laberinto tenga 17 compartimientos. Por otro lado, puede considerar significativo que todas las ratas sean hermanas o que una parte del laberinto esté más iluminada que otra. Nos referiremos a esta etapa de *idealización, aproximación e identificación* como la construcción de *un modelo real*. Esta terminología trata de reflejar el hecho de que el contexto es, todavía, el de los objetos reales (animales, aparatos, etc.), pero que la situación puede no ser realista. Volviendo al laberinto, se puede construir un modelo real, con ratas que cambian de compartimento, de modo que cada rata esté siempre en algún compartimento, nunca la mitad en uno y la otra mitad en otro. Pero según qué aspecto sea el que se investiga puede ser adecuado considerar que la rata cambia de compartimento de manera regular en el tiempo.

La tercera etapa está más indefinida y con frecuencia requiere un alto grado de creatividad. Uno mira el modelo real e intenta identificar el proceso ope-rativo que funciona. La meta consiste en la expresión de la situación entera en términos simbólicos. Así el modelo real llega a ser un *modelo matemático* en el que las cantidades y los procesos reales son reemplazados por símbolos y operaciones matemáticas. Habitualmente, mucha de la valía del estudio gira sobre esta etapa, porque una identificación inapropiada entre el mundo real y el mundo matemático es improbable que conduzca a resultados útiles. Debería ponerse mucho énfasis en que la construcción de un modelo matemático no es, de ninguna manera, única. Puede haber varios modelos matemáticos para la misma situación real. En tales circunstancias puede suceder que de uno de los modelos pueda demostrarse que es claramente mejor que cualquiera de los otros por medio de observaciones. De hecho, ocurre a menudo que un experimento muy elaborado se diseña con el propósito de mostrar que un modelo es mejor que otros. Naturalmente, si esto puede ser demostrado, entonces uno lo elige para usarlo como el modelo mejor. Sin embargo, puede acontecer también que cada uno de varios modelos resulte ser útil en el estudio —contribuyendo cada modelo a la comprensión de algunos aspectos de la situación (por ejemplo, esto ocurre con las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz), pero que ningún modelo explique adecuadamente todas las facetas del problema que se está considerando. De este modo puede no haber el modelo mejor, y el que será usado dependerá de las cuestiones precisas que vayan a ser estudiadas.

En esta etapa es necesario decidir qué variables son importantes y cuáles no lo son. Las primeras se clasifican luego en *variables independientes* y *variables dependientes*. Las variables no importantes son aquellas que tienen muy poco o ningún efecto en el proceso. (Por ejemplo: (1) en el estudio de un cuerpo que cae, su color es de muy poco interés; (2) en el estudio de una mezcla de agua y sal dentro de un depósito, poco importa si la temperatura del agua es de 17^o C o de 32^o C). Las variables independientes son aquellas cuyo efecto es significativo y que servirán como información de entrada para el modelo. Para el cuerpo que cae, su forma, masa, posición inicial, velocidad inicial y tiempo transcurrido desde el instante de lanzamiento son posibles variables independientes. Para la mezcla de agua y sal el tiempo que ha pasado desde que comenzó el bombeo de mezcla hacia/desde el depósito es una variable independiente; también lo son la velocidad de flujo entrante y saliente, la concentración de sal entrante, la capacidad del depósito. En la formulación matemática del modelo, algunas variables independientes se pueden denominar *parámetros*. Por otra parte, las variables dependientes o funciones son las que dependen de las independientes y que son importantes en la solución del problema. De nuevo para el cuerpo en caída, su velocidad, su posición y el instante de impacto son posibles variables dependientes. En las mezclas de agua y sal, la cantidad total de sal que hay en el depósito en cada momento es una variable dependiente.

En segundo lugar, se debe determinar o especificar las relaciones (p. ej., una ecuación diferencial) que existan entre las variables dependientes e independientes. Para traducir los problemas en términos matemáticos es muy importante indicar claramente las *unidades físicas* (metros, centímetros, kilogramos, gramos, segundos, minutos, amperios, voltios, etc.). Hay que hacer también un *análisis dimensional* de los dos miembros de cada ecuación; por ejemplo, no debiera suceder que en el miembro a la izquierda del signo = salieran kgs/sg y en el de la derecha salieran kgs/min. Muchos de estos problemas encajan en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{lcl}
\text{velocidad} & & \text{velocidad} & & \text{velocidad} \\
\text{instantánea} & = & \text{instantánea} & - & \text{instantánea} \\
\text{de cambio} & & \text{de entrada} & & \text{de salida}
\end{array}$$

Este esquema puede ser sustituido por el siguiente planteamiento global en un intervalo $[t, t+h]$ con h pequeño:

Incremento de la función incógnita durante $t \leq \tau \leq t+h$	$=$	Cantidad de sustancia que entra en $t \leq \tau \leq t+h$	$-$	Cantidad de sustancia que sale en $t \leq \tau \leq t+h$

A continuación, utilizando el teorema del valor medio para integrales llegamos al primer esquema y, de éste, a la ecuación diferencial. Estos problemas pueden resultar difíciles al principio, pero acaban entendiéndose. Debe recordarse en todo momento que estas ecuaciones diferenciales no se deducen de una mane-ra matemática (es decir, rigurosa) de otros resultados matemáticos, sino que son modelos matemáticos; y que por lo tanto su única justificación estriba en la concordancia posterior de las predicciones teóricas con los experimentos de laboratorio.

Un artículo con muy buenos consejos para plantear ecuaciones diferenciales de primer orden para resolver problemas enunciados sólo con palabras (sin fórmulas), es "Setting up first-order differential equations from word problems" por Beverly Henderson West que aparece en las páginas 3–27 del Chap. 1 del libro:

M. Braun, C.S. Coleman, D.A. Drew, edits.:*Differential Equations Models*, Springer-Verlag, 1983.

Otros libros interesantes a este respecto son:

O. Plaat: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Reverté, Barcelona, 1974.

M.R. Spiegel: *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Tercera edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1983.

Después de que el problema ha sido transformado en *términos simbólicos*, el sistema matemático resultante se estudia usando *ideas y técnicas matemáticas* apropiadas. Los resultados del estudio matemático son teoremas, desde un punto de vista matemático, y *predicciones*, desde un punto de vista empírico. La motivación para el estudio matemático no es producir nuevas matemáticas, es decir, nuevas ideas abstractas o nuevos teoremas, aunque esto puede ocurrir; sino, lo que es mucho más importante, producir nueva información sobre la situación que está siendo estudiada. En efecto, es probable que tal información pueda ser obtenida usando conceptos y técnicas matemáticos bien conocidos. La contribución importante del estudio puede ser el reconocimiento de la relación entre resultados matemáticos conocidos y la situación que está siendo estudiada.

La etapa final es la comparación de los resultados, predichos en base al trabajo matemático, con el mundo real. La situación más feliz es aquella en la que todo lo observado está explicado por las conclusiones del estudio matemático y en la que las predicciones son comprobadas subsiguientemente mediante experimentos. Una concordancia tal no se observa frecuentemente, al menos no en el primer intento. Una situación mucho más típica sería aquella en que el conjunto de conclusiones de la teoría matemática contiene algo que parece estar de acuerdo y algo que parece estar en desacuerdo con los resultados de los experimentos. En tal caso, uno tiene que examinar todas las etapas del proceso de nuevo. ¿Ha habido alguna omisión significativa en la etapa que va del mundo real al modelo real? ¿Refleja el modelo matemático todos los aspectos importantes del modelo real, y evita introducir aspectos extraños no observados en el mundo real? ¿Está libre de errores el trabajo matemático? Habitualmente, el proceso de construcción de un modelo necesita varias iteraciones, siendo cada una un refinamiento de la precedente, hasta que se encuentra finalmente una aceptable.

Mediante un diagrama podemos representar este proceso en la figura 1.

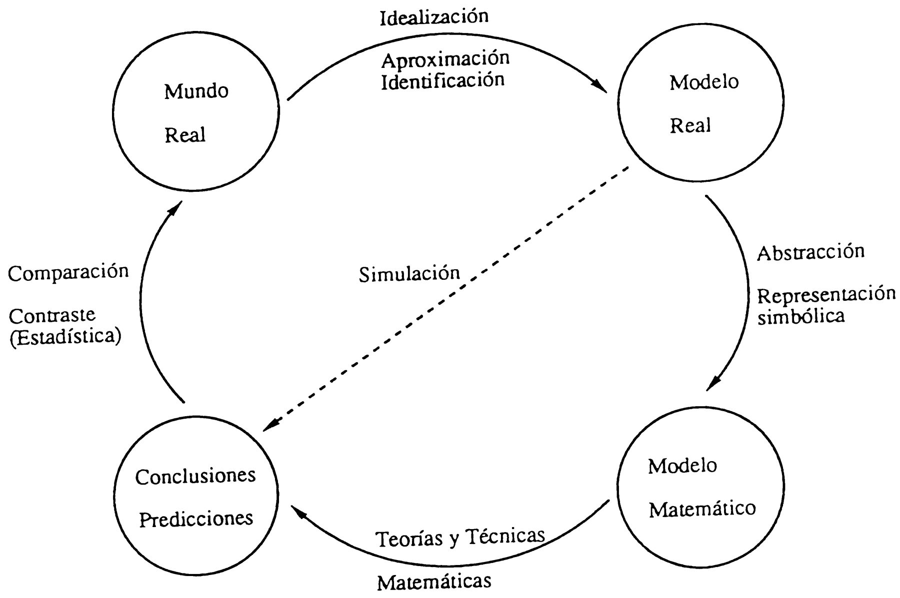


Figura 1

Las líneas continuas en la figura 1 indican el proceso de construcción, desarrollo, y comprobación de un modelo matemático como nosotros lo hemos perfilado más arriba. La línea de rayas se usa para indicar una versión abreviada de este proceso que es utilizada a menudo en la práctica. La versión acortada es frecuente en las ciencias sociales y biológicas donde la matematización de los conceptos puede ser difícil. En cualquier caso, las etapas en este proceso pueden ser excesivamente complejas y puede haber interacciones complicadas entre ellas. Sin embargo, tal simplificación es bastante útil para estudiar la construcción de modelos. Observamos también que la distinción entre modelos reales y modelos matemáticos es algo artificial. Es una manera conveniente de representar una parte básica del proceso, pero en muchos casos es muy difícil decidir dónde finaliza el modelo real y dónde empieza el modelo matemático. En general, los investigadores a menudo no se preocupan de trazar una distinción como esta. De aquí que, en la práctica, uno encuentra predicciones y conclusiones que están basadas en una especie de modelo híbrido en parte real y en parte matemático, sin ninguna diferencia clara entre los dos. Hay, sin embargo, algún peligro en esta forma de proceder. Mientras que puede ser muy apropiado trabajar con el modelo real en algunos casos y con el modelo matemático en otros, uno debería tener siempre en la mente el planteamiento que está siendo utilizado. En el mejor de los casos, un fallo en distinguir entre un modelo real y un modelo matemático es causa de confusión; en el peor, puede conducir directamente a conclusiones incorrectas. Las complicaciones pueden surguir porque los problemas en las ciencias sociales y biológicas implican a menudo conceptos, resultados y condiciones que son muy difíciles de cuantificar. De donde se sigue que aspectos esenciales del problema pueden ser perdidos en la transición del modelo real al modelo matemático. En tales casos las conclusiones basadas en el modelo matemático pueden muy bien no ser conclusiones sobre el mundo real o el modelo real. Así hay circunstancias en las que es crucial distinguir cuál es el modelo al que se refiere una conclusión.

Se necesita mucha práctica para construir modelos con éxito. En particular la habilidad para reconocer modelos y estructuras generales es tan importante en la construcción de modelos como lo es en el estudio de las matemáticas puras.

Rápidamente nos damos cuenta de que algunos de los mejores modelos para ciertos tipos de problemas son intratables matemáticamente. Esto es, el modelo conduce a cuestiones matemáticas que o bien no tienen soluciones conocidas o no tienen soluciones que puedan ser calculadas de una manera fiable y razonable. En tales situaciones a menudo se recurre a una simulación con ordenador para explorar las posibilidades. Una vez más, la naturaleza precisa del programa depende del problema específico.

Del esquema de la figura 1 se deduce una moraleja para el científico experimental: éste debe conocer bien las Matemáticas que emplea en el camino que va desde el Modelo Matemático a las Conclusiones y Predicciones, y también debe dominar las Matemáticas necesarias para comparar y contrastar éstas últimas con el Mundo Real. Siendo tantas las incertidumbres que rodean la realización correcta de un modelo matemático, debiéramos estar seguros de las Matemáticas empleadas. De este modo, imputaríamos cualquier discrepancia con la realidad a fallos en las dos primeras fases: 1ª.- Idealización, Aproximación e Identificación, y 2ª.- Abstracción y Representación Simbólica.

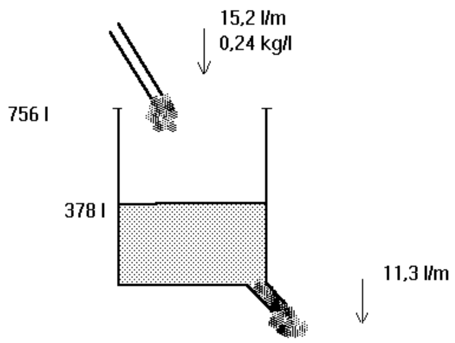
Algunos problemas que se resuelven mediante ecuaciones diferenciales ordinarias

Como motivación al estudio de las ecuaciones diferenciales enunciamos cinco problemas de otras ciencias que se resuelven mediante modelos matemáticos que utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias.

Problema 1. Depósito agitado

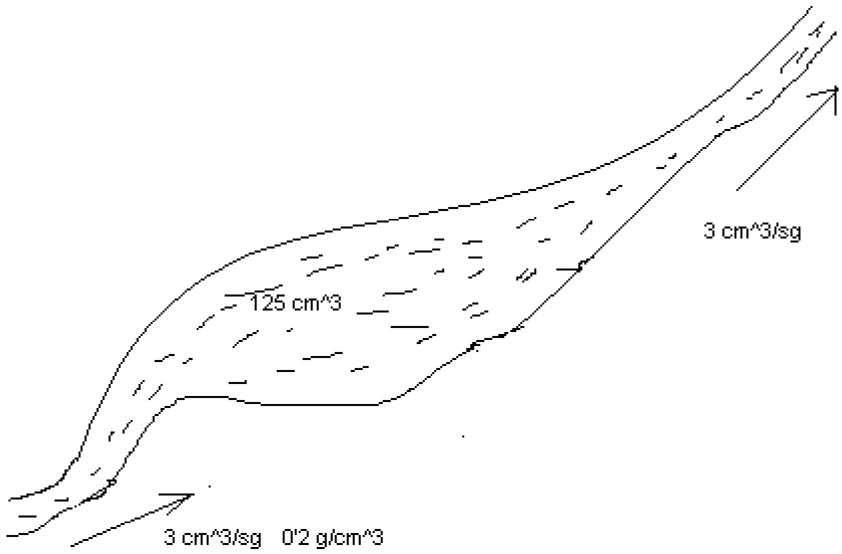
Consideremos un depósito, cuya capacidad es 756 litros, lleno hasta su mitad de agua pura. A partir de un instante fluye sobre el depósito una cañería que arroja una salmuera o solución (mezcla de agua y sal) a razón de $15'12$ litros por minuto; esta salmuera tiene una concentración de $0'24$ kg. de sal por litro. Al mismo tiempo, fluye el líquido al exterior por un sumidero, situado en la parte inferior del tanque, con un gasto de $11'3$ litros por minuto.

Queremos estudiar la evolución de la *cantidad de sal* en el depósito en el transcurso del tiempo. En particular, queremos conocer: (1) La cantidad de sal presente en el tanque cuando se derrama el líquido por arriba; (2) el volumen de líquido (salmuera) que habrá en el tanque cuando contenga $0'12$ kg. de sal por litro y el instante en que el tanque tendrá esa concentración.



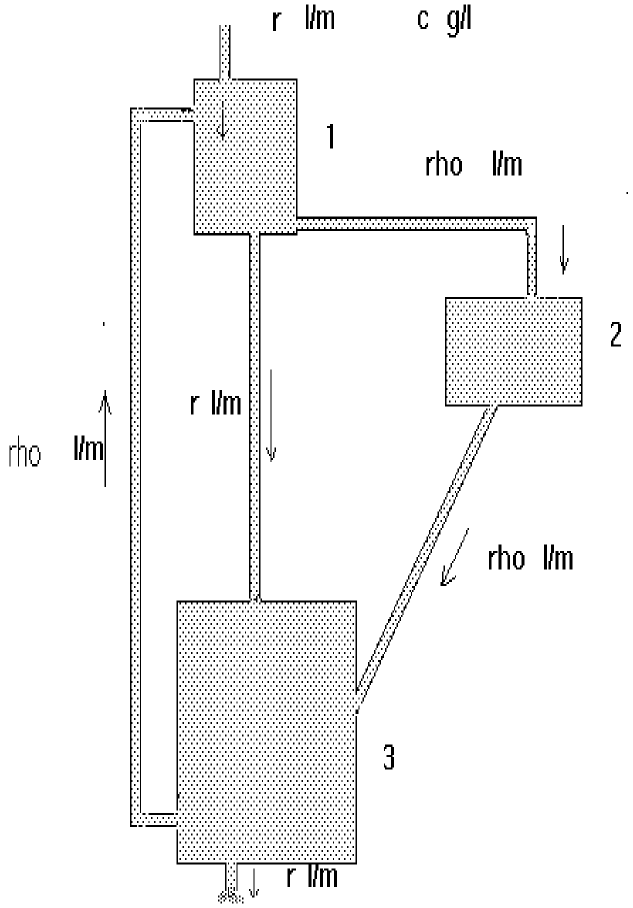
Problema 1 bis. Farmacocinética

La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 $\mathrm{cm}^3/\mathrm{sg}$ y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de $0'2$ $\mathrm{g/cm}^3$, ¿cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t si inicialmente no había ningún vestigio del medicamento? ¿Cuándo será de $0'1$ $\mathrm{g/cm}^3$ la concentración de medicamento en el órgano?



Problema 2. Depósitos conectados. Análisis compartimental

Se tienen tres depósitos agitados conectados por tuberías de volumen despreciable como se indica en la figura adjunta



Problema 2.

Los depósitos tienen volúmenes iguales a 85 l., 75 l. y 200 l., y contienen inicialmente 18000 g., 0 g. y 5000 g. de sal, respectivamente. A partir de un determinado instante se bombea al depósito superior una mezcla de agua y sal con una concentración de sal de c g/l a razón de r l/m . Hallar los gramos de sal presentes en cada depósito en función del tiempo: $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

¿Dependen los límites

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t), \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t), \quad \lim_{t\to\infty} x_3(t)$$

de las condiciones iniciales $x_1(0) = 18000, x_2(0) = 0, x_3(0) = 5000$?

Problema 3. Cinética química

Se combinan 260 g. de $CH_3COOC_2H_5$ (acetato etílico) con 175 g. de $NaOH$ (hidróxido de sodio) en un volumen de V litros de solución acuosa, para producir CH_3COONa (acetato de sodio) y C_2H_5OH (alcohol etílico), tomando la reacción

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

como irreversible. Al cabo de 10 minutos, se han formado 60 g. de acetato de sodio. Sabiendo que la reacción obedece a la *ley de acción de masas*:

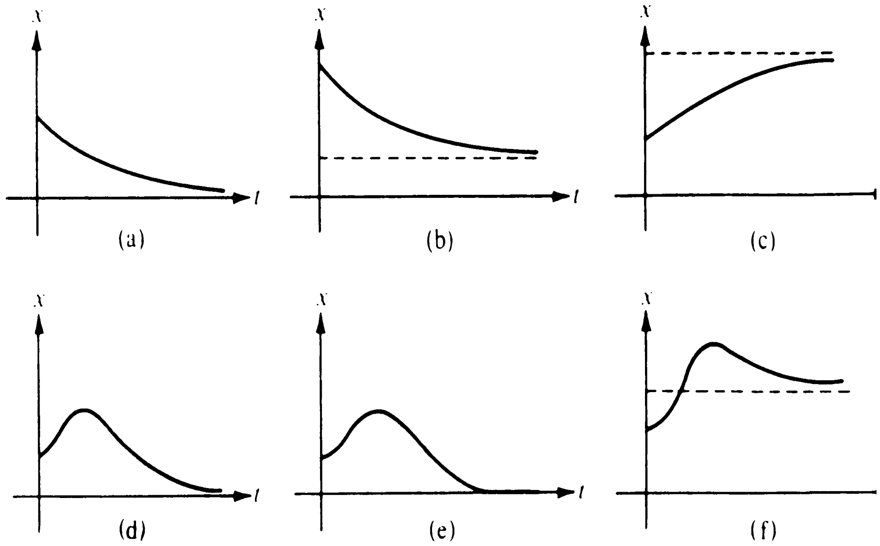
(a) calcúlese la constante de velocidad; (b) hállese el número de gramos de acetato de sodio y de alcohol etílico presentes al cabo de 1/2 hora.

(Sugerencia: utilícense los pesos atómicos: $C = 12'01$, $H = 1'008$, $O = 16$, $Na = 22'997$).

Problema 4. Microbiología

La presencia de toxinas en un cierto medio destruye un cultivo de bacterias a una velocidad proporcional al número de bacterias y a la cantidad de toxinas presentes en el cultivo. Si no hubiera toxinas las bacterias crecerían con una velocidad proporcional a la cantidad total de bacterias existente. Sea x el número de bacterias vivas en el instante t. Supóngase que la cantidad de toxinas crece con una velocidad constante y que la producción de toxinas empieza en el instante $t = 0$.

Establecer una ecuación diferencial para x. Resolverla. Una de las curvas de abajo es la que representa mejor el comportamiento general de x como función de t. Decir cuál es la elegida y explicar el porqué.



Problema 5. Microbiología Supongamos que x_0 bacterias se ponen en una solución nutritiva en el instante $t = 0$ y que $x(t)$ es el número de bacterias del cultivo en un momento posterior t. Si el espacio es limitado y los alimentos se suministran de manera regular, la competencia por los alimentos y el espacio actuarán de tal modo que la población se estabilizará en N bacterias. Plantear (y resolver) una ecuación diferencial que pueda servir de modelo matemático para este fenómeno de manera que la solución que verifique la condición inicial $x(0) = x_0$ sea la función

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-kNt}}$$

donde k es una constante positiva. Dibujar la gráfica de $x(t)$.

Observación.- Todos estos problemas están enunciados como “modelos” reales y no como serían verdaderamente en el “mundo” real. Será fácil observar que el enunciado introduce hipótesis simplificadoras. Se recomienda como ejercicio buscar estas hipótesis en cada uno de estos 6 problemas.