Depósitos agitados. Problemas de mezclas

Problema 1. Depósito agitado

En primer lugar vamos a resolver el Problema 1 del Fascículo 2^o. El enunciado del problema nos habla de un *modelo* real. En el mundo real las cosas son de otra manera: (1) La velocidad de salida de mezcla del depósito no será constante en todo momento, unas veces será de 11'289 l/m, otras veces será de 11'31 l/m. Parecido ocurre con la velocidad de entrada, ésta oscilará alrededor de 15'12 l/m. Supondremos que mediante un sistema de bombeo se hace que estas velocidades permanezcan constantes. (2) La concentración de sal en la mezcla de entrada tampoco será constante e igual a 0'24 kg/l. Supondremos que un sistema agita la mezcla entrante para que se pueda suponer que aproximadamente su concentración es constante en todo momento.

Para abordar este problema con la ecuación diferencial lineal, necesitamos introducir otra hipótesis más para simplificar las cosas: Supondremos que la mezcla se hace homogénea al instante. Es claro que en la realidad esto no ocurre. Así al principio de comenzar el bombeo, la capas superiores de líquido en el depósito tienen más sal que las capas de abajo, que son de agua pura. Para hacer esta hipótesis verosímil supondremos que disponemos de un agitador dentro del depósito (unas hélices que baten la mezcla), o bien que se inyectan burbujas de gas desde abajo. Por otra parte esto es lo que hacemos cuando agitamos un jarabe inmediatamente antes de tomarlo.

Queremos que quede clara esta hipótesis. Que la mezcla es homogénea o uniforme quiere decir que si sacamos simultáneamente dos cubitos de 1 cm^3 de arriba y de abajo, y dejamos evaporar el agua de los mismos, entonces queda como residuo en ellos la misma cantidad de sal.

Llamemos $x(t)$ a los kilogramos de sal que hay en el tanque a los t minutos de comenzar el bombeo. Por lo tanto, $x(0) = 0$. Sea $v(t)$ el volumen en litros que hay en el tanque a los t minutos de comenzar el bombeo. Así, $v(0) = 378$. Es fácil deducir que

$$v(t) = 378 + (15'12 - 11'3)t = 378 + 3'82t.$$

Sea $h > 0$. A la diferencia $x(t+h) - x(t)$ le llamaremos el incremento de x:

$$\Delta x := x(t+h) - x(t).$$

Para establecer el modelo matemático utilizamos el **Principio fundamental:** *El incremento de sal es igual a la cantidad de sal que ha* entrado *en el tanque durante el tiempo que va de t a $t+h$, menos la cantidad de sal que ha* salido *del tanque desde t hasta $t+h$.*

$$\Delta x \quad = \quad \begin{array}{c}\text{sal entra en}\\ [t, t+h]\end{array} \quad - \quad \begin{array}{c}\text{sal sale en}\\ [t, t+h]\end{array}$$

La cantidad de sal que entra durante los h minutos que van de t hasta $t+h$ es igual a $15'12 \cdot 0'24h$. Esto ha sido tan fácil de calcular porque la concentración de la mezcla que entra es constante.

Sin embargo, esto no ocurre en la mezcla que sale por abajo, y la cantidad de sal que sale desde el instante t al instante $t+h$, es igual a:

$$\int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)}\, 11'3 \; d\tau$$

Una justificación de que esto es cierto puede verse en el Apéndice 1 y está basada en el concepto de integral definida. Aconsejamos dejarlo para una segunda o tercera lectura.

De acuerdo con el Principio Fundamental tenemos que la función incógnita $x(t)$ es aquella que cumple para todos t y h la ecuación fundamental

$$x(t+h) - x(t) = 15'12 \cdot 0'24h - \int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)}\, 11'3 \; d\tau$$

y la condición inicial $x(0) = 0$.

Pero, esta ecuación es muy extraña para nosotros y vamos a tratar de aproximarla a una ecuación con la que estemos familiarizados. Utilizando el Teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe un número $\theta : \; 0 \leq \theta \leq 1$ tal que

$$\int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)}\, 11'3 \; d\tau = \frac{x(t+\theta h)}{v(t+\theta h)}\, 11,3\, h.$$

Llevando este resultado a la ecuación fundamental resulta que

$$\frac{\Delta x}{h} = 3'63 - \frac{x(t+\theta h)}{v(t+\theta h)}\, 11,3$$

Hacemos tender h hacia 0 y, suponiendo que $x(t)$ es derivable, resulta que

$$x'(t) = 3'63 - \frac{x(t)}{v(t)}\, 11'3$$

(pues $t + \theta h \to t$ cuando $h \to 0$ y $x(t)$ es continua).

De este modo hemos transformado la ecuación fundamental en

$$x'(t) = -\frac{11'3}{378 + 3'82t}\, x(t) + 3'63. \tag{1}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal no homogénea. Tenemos que hallar la solución de esta ecuación que cumple la condición inicial $x(0) = 0$. Por el teorema de existencia y unicidad sabemos que sólo hay una solución. Esta será la solución "matemática" de nuestro problema.

Recordando que la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau}\, b(s)\, ds + x_0 \right],$$

se tiene que

$$x(t) = e^{\int_0^t -\frac{11'3}{378+3'82s}\, ds} \int_0^t e^{\int_0^s \frac{11'3}{378+3'82\tau}\, d\tau}\, 3'63\, ds.$$

Procedamos ahora a calcular las tres integrales que aparecen en esta fórmula. En primer lugar, es inmediato que

$$\int \frac{11'3}{378 + 3'82s}\, ds = \frac{11'3}{3'82} \ln(378 + 3'82s) + K;$$

de aquí, por la regla de Barrow, se sigue que

$$\int_0^t \frac{11'3}{378 + 3'82s}\, ds = \frac{11'3}{3'82} \ln\left(1 + \frac{3'82}{378}t\right) = \ln\left(1 + \frac{3'82}{378}t\right)^{11'3/3'82},$$

pues $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ y $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

De donde deducimos que

$$e^{-\int_0^t \frac{11'3}{378+3'82s}\, ds} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3'82}{378}t\right)^{11'3/3'82}}.$$

Por otra parte, también se sigue que

$$\int_0^t e^{\int_0^s \frac{11'3}{378+3'82\tau}\, d\tau}\, 3'63\, ds = 3'63 \int_0^t \left(1 + \frac{3'82}{378}s\right)^{11'3/3'82} ds;$$

teniendo presente que

$$\int (a + bx)^c\, dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{(a + bx)^{c+1}}{c + 1},$$

se deduce que

$$\int \left(1+\frac{3'82}{378}s\right)^{1130/382} ds = \frac{378}{3'82}\cdot\frac{\left(1+\frac{3'82}{378}s\right)^{\frac{1130}{382}+1}}{\frac{1130}{382}+1}$$

$$=\frac{378}{3'82}\cdot\frac{\left(1+\frac{3'82}{378}s\right)^{1512/382}}{1512/382}=\frac{378}{3'82}\cdot\frac{382}{1512}\cdot\left(1+\frac{3'82}{378}s\right)^{1512/382}.$$

De esta función primitiva inferimos que

$$3'63\int_0^t \left(1+\frac{3'82}{378}s\right)^{11'3/3'82} ds = 3'63\cdot\frac{378}{3'82}\cdot\frac{382}{1512}\left[\left(1+\frac{3'82}{378}t\right)^{1512/382}-1\right].$$

Una vez calculadas las tres integrales, obtenemos

$$x(t)=\left(1+\frac{3'82}{378}t\right)^{-11'3/3'82}\cdot 90'75\left[\left(1+\frac{3'82}{378}t\right)^{1512/382}-1\right];$$

que se simplifica a

$$x(t)=90'75\left[1+\frac{3'82}{378}t-\left(1+\frac{3'82}{378}t\right)^{-1130/382}\right]; \tag{2}$$

esta fórmula es válida en el intervalo $0\le t\le 98'95$, siendo $98'95$ los minutos que cuesta llenarse el tanque.

La respuesta a la primera pregunta concreta —¿cuántos kgs. de sal contiene el tanque cuando se llena?— es 170 kg. Pues $x(98'95)\simeq 170$. El signo $\simeq$ se lee "es aproximadamente igual a".

La segunda pregunta concreta era ¿cuál es el volumen de salmuera (o mezcla) cuando la concentración es $0'12$ kg/l?

Para ello debemos resolver la ecuación

$$\frac{x(t)}{v(t)}=0'12 \tag{3}$$

respecto de la incógnita t.

La fórmula del volumen es $v(t)=378+3'82t$; la fórmula de $x(t)$ viene dada por la ecuación (2). Sustituyendo ambas fórmulas en la ecuación (3), ésta se transforma en

$$(1+0'0101t)^{-2'9581}=0'5001+0'0051t.$$

Llamando

$$f(t):=\frac{1}{0'0051}\left[(1+0'0101t)^{-2'9581}-0'5001\right]-t,$$

la ecuación (3) equivale a la ecuación

$$f(t) = 0.$$

Resolver esta ecuación quiere decir hallar los números reales t_1 tales que $f(t_1) = 0$. Estos números se llaman las raíces de la ecuación $f(t) = 0$, o los ceros de la función $f(t)$. Rara vez se pueden hallar de forma exacta. Aquí no podemos aplicar la regla de Ruffini o algo parecido. Debemos conformarnos con soluciones *aproximadas*. Dado que la función $f(t)$ es continua en el intervalo $[0, 98'95]$, $f(0) > 0$ y $f(98'95) < 0$, por el Teorema de Bolzano (Valores intermedios) $f(t)$ tiene al menos un cero en dicho intervalo. Este cero puede hallarse aproximadamente por el *método de la bisección*. Este método está basado en el Teorema de Bolzano. Puede verse una descripción del método en el Apéndice 2. Empleando el método de la bisección obtenemos el cero $t_1 \simeq 18'8455$.

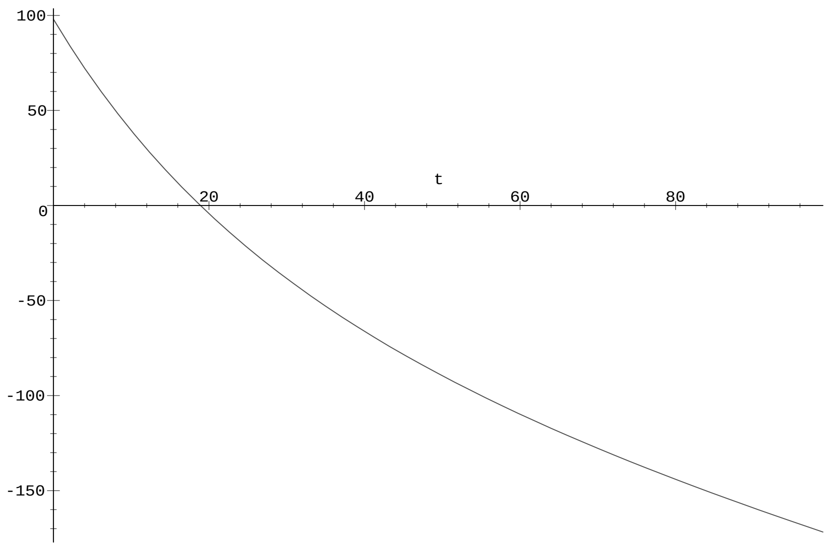

Figure 1: Gráfica de $f(t)$

De donde,

$$v(18'8455) = 378 + 3'82 \cdot 18'8455 = 449'9898 \simeq 450 \text{ l}.$$

Observación muy importante.- A partir de ahora y en todos los problemas que hagamos sobre mezclas, no será preciso que reproduzcamos el mismo razonamiento con integrales y el teorema del valor madio para llegar a la ecuación diferencial correspondiente a la ecuación (1). Bastará con que apliquemos la regla práctica:

		sal que entra		sal que sale
derivada	=	por unidad	—	por unidad
		de tiempo		de tiempo

Ecuación diferencial del tanque lleno

Todavía debemos terminar la solución del Problema 1. A partir del instante en que se llena el tanque, la ecuación diferencial (1) ya no sirve como modelo matemático del proceso. Teniendo en cuenta la regla práctica que acabamos de mencionar, el problema de condiciones iniciales que ahora debe considerarse es

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3'63 - \frac{15'12}{756} x(t), \quad 98'95 \leq t, \\ x(98'95) = 170. \end{array} \right. \tag{4}$$

Simplificando un poco, este problema equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -0'02 x(t) + 3'63, \\ x(98'95) = 170; \end{array} \right.$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\int_{98'95}^{t} e^{\int_{98'95}^{s} 0'02\, d\tau} 3'63\, ds + 170 \right] e^{-\int_{98'95}^{t} 0'02\, ds} \\ &= 181'5 - 83'29 e^{-0'02t}, \qquad 98'95 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Consideraciones finales

Nunca debemos dar por acabada la solución de un problema de modelos matemáticos sin un análisis a posteriori de los resultados obtenidos. En primer lugar, haremos este análisis a la luz del sentido común. Un segundo análisis debería hacerse contrastando los resultados teóricos obtenidos con mediciones y experimentos en un laboratorio o campo. Nosotros sólo podremos utilizar aquí la primera aproximación del sentido común.

Empezaremos por tratar de intuir el comportamiento a largo plazo del sistema formado por el depósito y las tuberías; esto es, ¿qué podemos decir de $x(t)$ cuando pase mucho tiempo? ¿o de la concentración $c(t) := x(t)/v(t)$? Nos referimos a la predicción de los límites

$$\lim_{t \to \infty} x(t), \qquad \lim_{t \to \infty} c(t).$$

Son cuestiones sobre el *comportamiento asintótico* del sistema. Es obvio que cuando pase muchísimo tiempo la concentración de sal en el depósito será casi igual a $0'24$ kg/l, que es la concentración de la mezcla que entra por arriba. Por lo tanto, debemos esperar que

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = 0'24.$$

Por otra parte, como el depósito tiene una capacidad de 756 litros, es de esperar que la cantidad de sal presente en el depósito cuando pase muchísimo tiempo será de $756 \text{ l} \times 0'24 \text{ kg/l} = 181'44$ kg. Así, debería ser cierto que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 181'44.$$

Si tenemos en cuenta que $x(t) = 181'5 - 83'29e^{-0'02t}$ cuando $t \geq 98'95$, se sigue del resultado teórico (aproximado) que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 181'5, \quad \text{y que } \lim_{t\to\infty} c(t) = \frac{181'5}{756} = 0'24007.$$

Por consiguiente, los resultados teóricos han soportado esta prueba.

La respuesta a la primera pregunta: 170 kg es razonable, pues es inferior a $181'44$ kg. La segunda pregunta es razonable pues $0'12$ kg/l es menor que $0'24$ kg/l. Una pregunta absurda sería preguntar por el momento en el que la concentración de sal en el tanque será de $0'35$ kg por litro, pues el sentido común dice que eso nunca sucederá, etc.

Método abreviado para plantear y resolver problemas de mezclas en depósitos

- Definir claramente la función incógnita identificando las *unidades físicas*.
- $$\boxed{\text{Derivada} \quad = \quad \begin{array}{l}\text{sal que } \textit{entra}\\ \text{por unidad}\\ \text{de tiempo}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{l}\text{sal que } \textit{sale}\\ \text{por unidad}\\ \text{de tiempo}\end{array}}$$
- Resolver la ecuación diferencial resultante.
- Análisis a posteriori de los resultados obtenidos, mediante el sentido común:
  - Magnitud de las variables compatible con los datos.
  - Comportamiento previsible del sistema a largo plazo (comportamiento asintótico cuando $t \to \infty$).
  - Etc.

Problema 1 bis. Farmacocinética

Vamos a resolver ahora el Problema 1 bis del Fascículo 2^o. Sea $x(t) :=$ gramos de medicamento en el órgano a los t segundos de empezar la llegada del medicamento. Por lo que hemos supuesto, $x(0) = 0$.

De acuerdo con el principio fundamental, planteamos el modelo matemático:

$x'(t)$	$=$	medicamento que *entra* por sg	—	medicamento que *sale* por sg

De donde,

$$x'(t) = 0'2 \text{ g/cm}^3 \times 3 \text{ cm}^3/\text{sg} - \frac{x(t)}{125} \text{ g/cm}^3 \times 3 \text{ cm}^3/\text{sg}$$

Por lo tanto, debemos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{3}{125}x(t) + 0'6, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Su solución viene dada por

$$x(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{3}{125}\, ds\right) \int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{3}{125}\, d\tau\right) 0'6\, ds.$$

Aquí hemos utilizado la notación $\exp(x) := e^x$. Haciendo operaciones tenemos

$$x(t) = 0'6 \exp\left(-\frac{3}{125}\, t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{3}{125}\, s\right)\, ds$$

$$= 0'6 \exp\left(-\frac{3}{125}\, t\right) \left[\frac{125}{3} \exp\left(\frac{3}{125}\, s\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{125}{3} \cdot 0'6 \left[\exp\left(-\frac{3}{125}\, t\right) \left(\exp\left(\frac{3}{125}\, t\right) - 1\right)\right]$$

$$= 25 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{3}{125}\, t\right)\right).$$

De esta fórmula se sigue que la concentración de medicamento en el órgano a los t segundos es

$$c(t) = \frac{x(t)}{125} = 0'2 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{3}{125}\, t\right)\right) \text{ g/cm}^3.$$

¿En qué momento será de $0'1$ g/cm^3 la concentración de medicamento en el órgano? Para contestar a esta pregunta debemos resolver la ecuación

$$c(t) = 0'1$$

respecto de la incógnita t.

Esta ecuación equivale sucesivamente a

$$1 - \exp\left(-\frac{3}{125}\,t\right) = 0'5$$

$$0'5 = \exp\left(-\frac{3}{125}\,t\right)$$

$$\ln 0'5 = -\frac{3}{125}\,t$$

Luego,

$$t = -\frac{125}{3}\ln 0'5 = -\frac{125}{3}\cdot(-0'6931) = 28'88 \text{ sg.}$$

Problema 2. Depósitos conectados. Análisis compartimental

Plantearemos matemáticamente el Problema 2 del Fascículo 2^o. Sean $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ las cantidades de sal en gramos presentes en cada uno de los depósitos a los t minutos de comenzar el bombeo. Aplicando a cada uno de los tres depósitos el principio:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} x_i'(t) & = & \text{sal que} & \text{—} & \text{sal que} \\ & & \textit{entra} \text{ por m} & & \textit{sale} \text{ por m} \end{array}}$$

para $i = 1, 2, 3$, tenemos que

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{x_1(t)}{85}\,(r+\rho) + \frac{x_3(t)}{200}\,\rho + cr \\ x_2'(t) = \frac{x_1(t)}{85}\,\rho - \frac{x_2(t)}{75}\,\rho \\ x_3'(t) = \frac{x_1(t)}{85}\,r + \frac{x_2(t)}{75}\,\rho - \frac{x_3(t)}{200}\,(r+\rho) \end{cases}$$

Este es un sistemas de tres ecuaciones diferenciales lineales con tres funciones incógnitas. Teniendo en cuenta como se definen la suma y el producto de matrices, este sistema puede replantearse —junto con las condiciones iniciales— de la siguiente manera

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r+\rho}{85} & 0 & \frac{\rho}{200} \\ \frac{\rho}{85} & -\frac{\rho}{75} & 0 \\ \frac{r}{85} & \frac{\rho}{75} & -\frac{r+\rho}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cr \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18000 \\ 0 \\ 5000 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Con las Matemáticas explicadas hasta este momento del curso, no tenemos herramientas suficientes para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Por ello, dejaremos la finalización de este problema para más adelante.

Identificación de Parámetros

Del conocimiento de las fórmulas que relacionan los valores de los parámetros r y ρ con las funciones $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, podríamos tratar de inferir el valor de dichos parámetros a partir de medidas de los valores de estas funciones en instantes de tiempo espaciados $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$. Dicho de otro modo: Supongamos que los valores de r y ρ no son conocidos a priori, y que, por mediciones directas de la concentración presente en los tres depósitos, conocemos los valores

$$\begin{array}{ccc} x_1(t_1) & x_2(t_1) & x_3(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & x_3(t_2) \\ x_1(t_3) & x_2(t_3) & x_3(t_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(t_n) & x_2(t_n) & x_3(t_n) \end{array}$$

¿Podemos deducir de ellos los valores de r y ρ? Estas ideas encuentran aplicación en Medicina. Por este procedimento puede medirse la velocidad de llegada de sangre a un órgano. También se ha aplicado para medir el volumen de sangre que atraviesa el corazón por unidad de tiempo, tomando el lugar que en nuestros ejemplos ocupaba la sal, una solución coloreada inyectada en el corazón.

Otros parámetros que podríamos tratar de estimar por mediciones indirectas serían los volúmenes totales de los depósitos. Esta técnica es utilizada para medir la capacidad pulmonar mediante flujos de mezcla de gases en vez de mezclas líquidas.

Problema: Hilera de tanques agitados

El primer tanque de una hilera contiene una mezcla de $G - g$ litros de líquido A y g litros de líquido B. Cada uno de los tanques siguientes contiene G litros de líquido A. A partir del instante $t = 0$ se bombea líquido A al primer tanque al gasto de r litros por minuto y así una mezcla de A y B se hace pasar de un tanque al siguiente con el mismo gasto. Supóngase que los tanques están perfectamente agitados. Sean $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$ las cantidades de líquido B en los tanques sucesivos en el instante t, y demuéstrese que

$$x_n(t) = \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n t^n e^{-(r/G)t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Demuéstrese que cuando $n > 0$, la función $x_n(t)$ aumenta hasta que $t = \frac{nG}{r}$ y a partir de ahí decrece, y que el valor máximo de $x_n(t)$ es

$$g\frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

Deducir de aquí que

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq 1.$$

Solución

Demostraremos la fórmula para $x_n(t)$ por inducción sobre n.

(1°) *Caso* $n = 0$

El líquido B hará de “sal” y el líquido A hará el papel del “agua” en la mezcla. Por el principio funfamental

$$x_0' = 0 \text{ lit. de } B/\text{m} - \frac{x_0}{G} \text{ lit. de } B/\text{lit. de mezcla} \times r \text{ lit. de mezcla/m}.$$

Por lo tanto, el problema de condiciones iniciales que debemos resolver es

$$\begin{cases} x_0' = -\frac{r}{G}x_0 \\ x_0(0) = g \end{cases} \tag{5}$$

La solución general de la ecuación diferencial es $x_0(t) = Ke^{-(r/G)t}$. Imponiendo en ella la condición inicial $x_0(0) = g$ determinamos el valor de la constante K: $K = g$. Por consiguiente, la solución del problema (5) es

$$x_0(t) = ge^{-(r/G)t}.$$

Si $n = 0$, $0! := 1$, $\left(\frac{r}{G}\right)^0 := 1$, $t^0 := 1$. Por ello, hemos probado que la fórmula para $x_n(t)$ es cierta para $n = 0$.

(2°) $n \Rightarrow n + 1$

Supongamos que la fórmula es cierta para n y vamos a demostrarla para $n + 1$.

Atentiendo a lo que ocurre en el tanque $(n + 1)$–ésimo, planteamos

$$x_{n+1}' = \text{líq. } B \text{ entra/m} - \text{líq. } B \text{ sale/m}.$$

Lo que se concreta en el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_{n+1}' = \frac{r}{G}x_n - \frac{r}{G}x_{n+1} \\ x_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

Por la hipótesis de inducción,

$$x_n(t) = \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n t^n e^{-(r/G)t};$$

lo que implica que el problema a resolver es

$$\begin{cases} x'_{n+1} = \frac{r}{G}\frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n t^n e^{-(r/G)t} - \frac{r}{G}x_{n+1} \\ x_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

en la incógnita $x_{n+1}(t)$. Su solución viene dada por la fórmula

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \exp\left(\int_0^t -\frac{r}{G}\,ds\right)\int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{r}{G}\,d\tau\right)\frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^{n+1} s^n e^{-(r/G)s}\,ds \\ &= e^{-(r/G)t}\int_0^t e^{(r/G)s}\frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^{n+1} s^n e^{-(r/G)s}\,ds \\ &= \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^{n+1} e^{-(r/G)t}\left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^t \\ &= \frac{g}{(n+1)!}\left(\frac{r}{G}\right)^{n+1} t^{n+1}e^{-(r/G)t}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la fórmula es cierta para $n+1$.

Por lo tanto, en virtud del Principio de Inducción la fórmula para $x_n(t)$ es cierta para todo entero $n \geq 0$.

Máximo de $x_n(t) = \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n t^n e^{-(r/G)t}$.

Derivamos $x_n(t)$ respecto de t:

$$\begin{aligned} x'_n(t) &= \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n \left[nt^{n-1}e^{-(r/G)t} - \frac{r}{G}t^n e^{-(r/G)t}\right] \\ &= \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n e^{-(r/G)t}t^{n-1}\left[n - \frac{r}{G}t\right] \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $x'_n(t) = 0$:

$$x'_n(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{r}{G}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{nG}{r}.$$

Si $t < \frac{nG}{r}, \Rightarrow x'_n(t) > 0, \Rightarrow x_n(t)$ es creciente en $[0, \frac{nG}{r}]$.
Si $t > \frac{nG}{r}, \Rightarrow x'_n(t) < 0, \Rightarrow x_n(t)$ es decreciente en $[\frac{nG}{r}, \infty)$.

$$\Downarrow$$

la función $x_n(t)$ tiene un valor máximo, M_n, en $t = \frac{nG}{r}$:

$$\begin{aligned} M_n &:= x_n\left(\frac{nG}{r}\right) \\ &= \frac{g}{n!}\left(\frac{r}{G}\right)^n\left(\frac{nG}{r}\right)^n \exp(-(r/G)(nG/r)) \\ &= g\frac{n^n e^{-n}}{n!}. \end{aligned}$$

Dado que la cantidad total disponible de líquido B es de g litros, se sigue que

$$g\frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq g;$$

de donde

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq 1.$$

Resulta curiosa la deducción de esta desigualdad matemática —una proposición sobre los enteros positivos— a partir de la solución de un problema de mezclas.

Apéndice 1

Veamos una *justificación* de que la cantidad de sal que sale del tanque durante el intervalo $[t, t+h]$ es igual a

$$\int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)} \, 11'3 \, d\tau.$$

En primer lugar, recordemos una definición de la integral definida de una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y $x_{i-1} \le t_i \le x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Si $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ es *suficientemente pequeño*, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx \simeq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Si $h > 0$ es *muy pequeño*,

$$\int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)} \, 11'3 \, d\tau \simeq \frac{x(t_1)}{v(t_1)} \, 11'3 \, h$$

con $t \le t_1 \le t + h$.

Si $h > 0$ no es *muy pequeño*,

$$\int_t^{t+h} \frac{x(\tau)}{v(\tau)} \, 11'3 \, d\tau \simeq \sum_{i=1}^n \frac{x(t_i)}{v(t_i)} \, 11'3 \, (\tau_i - \tau_{i-1}) \tag{6}$$

con

$$\tau_0 = t < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = t + h, \tag{7}$$

una partición del intervalo $[t, t+h]$ *suficientemente fina*, y donde $\tau_{i-1} \le t_i \le \tau_i \quad (i = 1, \ldots, n)$. Si cada subintervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ de $[t, t+h]$ es lo *suficientemente pequeño* podemos suponer que la concentración de sal en el tanque apenas varía durante el tiempo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, y podemos tomar las cosas como si esta concentración fuera *constante* en $[\tau_{i-1}, \tau_i]$:

$$\frac{x(t_i)}{v(t_i)}$$

con $\tau_{i-1} \le t_i \le \tau_i$. Por lo tanto, la cantidad de sal que sale del tanque durante el intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ es igual aproximadamente a

$$\frac{x(t_i)}{v(t_i)} \, 11'3 \, (\tau_i - \tau_{i-1}).$$

En consecuencia, la cantidad de sal que sale del tanque durante el intervalo total $[t, t+h]$ es aproximadamente igual a la suma del segundo miembro de (6). Refinando la partición (7) de $[t, t+h]$ cuanto sea necesario, podemos aceptar que la cantidad *exacta* de sal que sale en $[t, t+h]$ es la integral del primer miembro de (6).

Apéndice 2. Método de la bisección

El método de la bisección es un procedimiento iterativo (esto es, "que se repite") para hallar una raíz de una ecuación $f(t) = 0$ situada en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$ en el que la función $f(t)$ es continua y toma valores de signo distinto en los extremos del intervalo; es decir que se cumple que $f(a)f(b) < 0$. El Teorema de Bolzano asegura que en tales condiciones existe al menos un número $t_1 \in (a, b)$ tal que $f(t_1) = 0$.

Algoritmo

1. Calcular el valor $f(\frac{a+b}{2})$.

2. Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, parar. Pues hemos hallado una raíz: $\frac{a+b}{2}$.

3.
   - Si $f(a)$ y $f(\frac{a+b}{2})$ tienen signos distintos, definamos "nuevo" $b := \frac{a+b}{2}$, dejemos a sin cambiar, y vayamos al paso 4.
   - Si $f(a)$ y $f(\frac{a+b}{2})$ tienen el mismo signo, definamos "nuevo" $a := \frac{a+b}{2}$, dejemos b sin cambiar, y vayamos al paso 4.

4.
   - Si $\mid b - a \mid$ es menor que un cierto número $\varepsilon > 0$ (tolerancia prefijada de antemano), detengamos el proceso; entonces a o b es una raíz de $f(t) = 0$ con una tolerancia de $\pm\varepsilon$.
   - Si $\mid b - a \mid$ es mayor o igual que ε, vayamos de nuevo al paso 1.