Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Sistemas de ecuaciones de esta clase nos han aparecido al considerar el Problema 2 de varios depósitos interconectados con tuberías que llevan una solución (mezcla de agua y sal) de unos a otros.

Utilizaremos notación matricial. Precisamos también de unas pocas definiciones y notaciones sobre funciones vectoriales de una variable real.

Si $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n funciones reales de la variable real t, la función vectorial

$$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

designa un vector columna (o matriz columna) de n componentes para cada valor real de t. *Por definición*, decimos que $x(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

son derivables en t. En cuyo caso, definimos

$$x'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

El vector $x'(t)$ es la derivada de x en t.

Ejemplo.- Si $x_1(t) = t^2,\ x_2(t) = \cos t,\ x_3(t) = \exp(t^2)$ entonces

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \exp(t^2) \end{pmatrix}$$

es derivable y su derivada es igual a

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2\,t \\ -\operatorname{sen} t \\ 2\,t\exp(t^2) \end{pmatrix}.$$

Sean ahora $b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)$ funciones reales continuas de la variable real t.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t). \end{array} \right. \tag{1}$$

Aquí $a_{ij}\ \ (i,j = 1,2,\ldots,n)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son las funciones incógnitas. Denotando por $A = (a_{ij})$ la matriz cuadrada $n \times n$ formada por los coeficientes, podemos escribir el sistema (1) en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Llamando $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, el sistema (1) [ó (2)] se escribe así:

$$x'(t) = Ax(t) + b(t). \tag{3}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, no homogéneo, de coeficientes constantes.

Si falta $b(t)$ queda

$$\boxed{x'(t) = Ax(t)} \tag{4}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, homogéneo, de coeficientes constantes. Si no hay dudas, (4) lo podemos escribir abreviadamente omitiendo la t:

$$x' = Ax. \tag{5}$$

Debe quedar claro que x depende de t, pero A no depende: A es constante.

Para resolver el sistema (3) hay que resolver previamente el sistema (4). Empezaremos resolviendo el sistema (4), bajo ciertas restricciones muy generales.

En primer lugar, tratamos de ver si existen soluciones de la forma

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda_0 t} c}$$

donde λ_0 es un *número* y c un *vector columna* distinto de

$$0 = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ ceros.}$$

Suponemos que el vector

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{es constante.}$$

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$x'(t) = \lambda_0 \, e^{\lambda_0 t} c \tag{6}$$

Por otro lado,

$$Ax(t) = Ae^{\lambda_0 t}c = e^{\lambda_0 t}Ac \tag{7}$$

Como $x'(t) = Ax(t)$, de (6) y (7) se sigue que

$$e^{\lambda_0 t}\lambda_0 \, c = e^{\lambda_0 t}Ac \tag{8}$$

Dividiendo ambos miembros de (8) por $e^{\lambda_0 t}$ resulta

$$\lambda_0 \, c = Ac$$

o bien

$$\boxed{Ac = \lambda_0 \, c} \tag{9}$$

Así, (9) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0 t}c$ sea una solución de (4). Es fácil ver que (9) es también una condición suficiente. Resumiendo.

Proposición 1 *La función vectorial* $e^{\lambda_0 t}c$ *es una solución del sistema diferencial lineal* $x' = Ax$ *si y sólo si el número* λ_0 *y el vector columna* c *verifican la ecuación algebraica*

$$Ac = \lambda_0 \, c.$$

Nota.- La función nula $x(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (4), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0 t}c$ tratamos de encontrar un vector $c \neq 0$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $c \neq 0$ tales que $Ac = \lambda_0 \, c$. Esta ecuación es equivalente a $Ac = \lambda_0 \, Ic$, siendo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz unidad (o identidad) de orden n. La ecuación

$$Ac = \lambda_0 \, I c$$

es equivalente a

$$(\lambda_0 \, I - A) \, c = 0$$

Si c ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0 \, I - A|$$

tiene que ser igual a 0.

Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$|\lambda \, I - A| \tag{10}$$

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda \, I - A| = 0. \tag{11}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0 \, I - A) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

en las incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Una solución $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ de (12) con no todas las componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada A de orden n se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de A si existe un vector columna n-dimensional c no nulo tal que

$$Ac = \lambda_0 \, c.$$

El vector c se llama *vector propio* de A asociado al valor propio λ_0.

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Vamos a hallar sus valores propios. Por lo visto anteriormente es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda\, I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{14}$$

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (14):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$, resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0\, I - A)\, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos este sistema en la forma

$$\left\{ \begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\left\{ \begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Este sistema es equivalente al anterior (i.e. tiene las mismas soluciones). Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\left\{\begin{aligned} c_2 &= 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 &= -c_3 \end{aligned}\right.$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\left\{\begin{aligned} c_2 &= 4 \\ -3c_1 - c_2 &= -1 \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c_2 = 4}\,;$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c_1 = -1}$$

Así, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4\,e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema diferencial lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hemos terminado el ejemplo.

Sea ahora un x^0 un vector columna dado de n componentes:

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

x^0 se lee "x super cero".

Consideremos el problema de hallar la solución $x(t)$ del sistema diferencial lineal $x'(t) = Ax(t)$ que verifica la *condición inicial* $x(0) = x^0$:

$$(P_0) \left\{\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x^0 \end{aligned}\right.$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0 t}c$.

Hipótesis Suplementaria: Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, A, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda I - A| = 0$$

tiene sus n raíces simples.

Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $c^1, c^2, \ldots, c^n$ vectores propios de A aso-ciados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Formemos la matriz cuadrada $n \times n$

$$P = (c^1, c^2, \ldots, c^n)$$

que es la matriz cuyas columnas son $c^1, c^2, \ldots, c^n$.

Teorema 2 *Si los n valores propios de A son distintos, entonces los vectores propios $c^1, c^2, \ldots, c^n$ son linealmente independientes.*

Sin demostración.

Por lo tanto, la matriz P es invertible (su determinante, $|P|$, debe ser distinto de cero).

Hagamos el producto de las matrices A y P, AP, teniendo en cuenta las columnas de P:

$$AP = A(c^1, c^2, \ldots, c^n) = (Ac^1, Ac^2, \ldots, Ac^n)$$

Pero

$$Ac^i = \lambda_i c^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

luego

$$(Ac^1, Ac^2, \ldots, Ac^n) = (\lambda_1 c^1, \lambda_2 c^2, \ldots, \lambda_n c^n).$$

Teniendo en cuenta la forma de multiplicar matrices, se observa que

$$(\lambda_1 c^1, \lambda_2 c^2, \ldots, \lambda_n c^n) = (c^1, c^2, \ldots, c^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD;$$

llamando D a la matriz *diagonal* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Por consiguiente,

$$AP = PD. \tag{15}$$

Sea P^{-1} la matriz inversa de $P : P^{-1}P = I, \quad I = PP^{-1}$.

Cambio de variables

En el sistema $x'(t) = Ax(t)$, cambiamos la función incógnita $x(t)$ por la nueva función incógnita $y(t)$, dada por la fórmula

$$y(t) = P^{-1}x(t), \tag{16}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$y'(t) = P^{-1}x'(t),$$

pues P^{-1} es constante. Luego

$$Py'(t) = x'(t). \tag{17}$$

Sustituyendo (16) y (17) en $x'(t) = Ax(t)$, resulta:

$$Py'(t) = APy(t).$$

Multiplicando esta igualdad por P^{-1} a la izquierda:

$$y'(t) = P^{-1}APy(t). \tag{18}$$

Pero por (15),

$$P^{-1}AP = D;$$

en consecuencia

$$y'(t) = Dy(t). \tag{19}$$

De esta manera, el sistema diferencial $x'(t) = Ax(t)$ se transforma en el sistema equivalente

$$y'(t) = Dy(t)$$

(son equivalentes ambos sistemas pues el cambio $y(t) = P^{-1}x(t)$ es reversible).

Además
$$y^0 := y(0) = P^{-1}x(0) = P^{-1}x^0;$$
luego el problema (P_0) equivale al problema de condiciones iniciales
$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Dy(t) \\ y(0) = y^0 \end{array} \right. .$$

Llamemos $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ a las funciones componentes de la función vectorial $y(t)$:
$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Llamemos $y_1^0, \ldots, y_n^0$ a las componentes del vector columna y^0:
$$y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que
$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, (P_1) se puede reescribir así
$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots\% \; y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & y_1^0 \\ \%! & \vdots \\ & y_n^0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

En el sistema diferencial lineal homogéneo $y'(t) = Dy(t)$ se *desacoplan* las variables $y_1, \ldots, y_n$; es decir

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \quad , \qquad y_1(0) = y_1^0 \\ \quad \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \quad , \qquad y_n(0) = y_n^0 \end{cases}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y_i' = \lambda_i y_i$$

tiene por solución general

$$y_i(t) = Ke^{\lambda_i t}; \tag{20}$$

imponiendo en (20) la condición inicial $y_i(0) = y_i^0$ determinamos la constante K:

$$K = y_i^0.$$

Luego,

$$\boxed{y_i(t) = y_i^0 e^{\lambda_i t}},$$

$(i = 1, \ldots, n)$.

Estas fórmulas últimas se escriben matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Si definimos

$$e^{Dt} := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

la fórmula (21) se puede abreviar a

$$y(t) = e^{Dt} y^0. \tag{22}$$

Nótese que e^{Dt} es una matriz cuadrada $n \times n$.

Deshaciendo el cambio de variables $y(t) = P^{-1}x(t)$ en (22), resulta:

$$P^{-1}x(t) = e^{Dt}y^0$$

De donde,

$$x(t) = Pe^{Dt}y^0 = Pe^{Dt}P^{-1}x^0.$$

En conclusión

$$\boxed{x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x^0}$$

es la solución del problema de condición inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}.$$

Ejemplo:

Resolver el problema de condición inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

La matriz A es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos los valores propios de A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2.$$

(Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad 3 \text{ es una raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad -2 \text{ es una raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ es una raíz.)}$$

Como las *tres* raíces del polinomio característico de A, $|\lambda I - A|$, son *simples* (y A es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*. Por lo tanto, podemos aplicar el método de resolución dado a este sistema diferencial lineal.

Como en el ejemplo antes mencionado, calculamos un vector propio c^1, c^2, c^3 asociado a cada uno de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente:

$$c^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \ \%! \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \ \%! \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz P

$$P := (c^1, c^2, c^3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que $|P| \neq 0$, y, por lo tanto, P es invertible.
Hallamos la matriz inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por ello,

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x^0 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (4e^{-2t} - e^t)/3 \\ 4(e^t - e^{-2t})/3 \\ (e^t - 4e^{-2t})/3 \end{pmatrix}.$$

Esto es, si

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

entonces

$$x_1(t) = \frac{4e^{-2t} - e^t}{3}, \qquad x_2(t) = \frac{4(e^t - e^{-2t})}{3}, \qquad x_3(t) = \frac{e^t - 4e^{-2t}}{3}.$$

Comprobación:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8e^{-2t} - e^t)/3 \\ (4e^t + 8e^{-2t})/3 \\ (e^t + 8e^{-2t})/3 \end{pmatrix}$$

$$Ax(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{-2t} - e^t \\ 4e^t - 4e^{-2t} \\ e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{-2t} - e^t - 4e^t + 4e^{-2t} + 4e^t - 16e^{-2t} \\ 12e^{-2t} - 3e^t + 8e^t - 8e^{-2t} - e^t + 4e^{-2t} \\ 8e^{-2t} - 2e^t + 4e^t - 4e^{-2t} - e^t + 4e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8e^{-2t} - e^t \\ 4e^t + 8e^{-2t} \\ e^t + 8e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Vemos que se cumple que

$$x'(t) = Ax(t).$$

Por otra parte

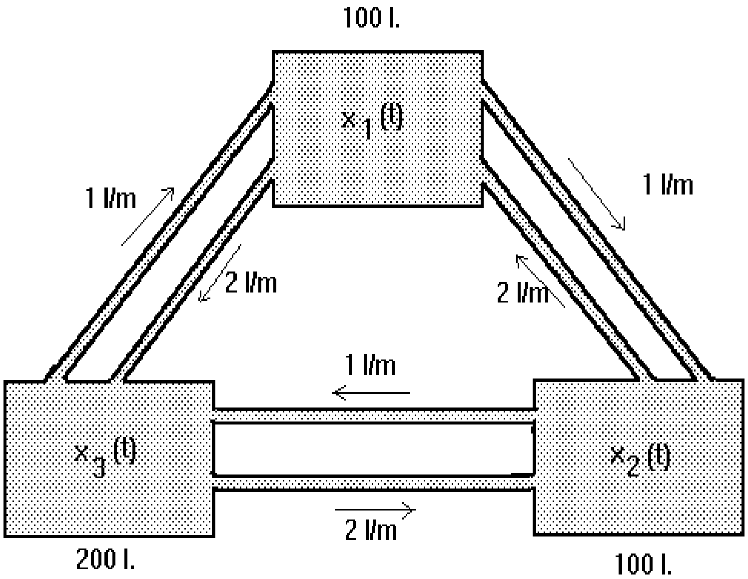
$$x(0) = \begin{pmatrix} (4-1)/3 \\ 4(1-1)/3 \\ (1-4)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Se tienen tres depósitos llenos de agua con sal e interconectados con tuberías como se muestra en la figura adjunta. Entre ellos se bombea la mezcla de agua y sal de acuerdo con las velocidades indicadas. Las capacidades de los depósitos son 100 l., 100 l. y 200 l., respectivamente. Las cantidades iniciales de sal (en kilogramos) en cada depósito son respectivamente s_1, s_2, s_3.

Demostrar que al cabo de mucho tiempo la concentración de sal en cada depósito tiende a ser la misma. ¿Hasta qué punto depende esta concentración del vector de condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}?.$$

Figura adjunta



Solución.- (Esquemática)

$$(P_0)\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& -\dfrac{3}{100}x_1(t)+\dfrac{2}{100}x_2(t)+\dfrac{1}{200}x_3(t)\\ x_2'(t) &=& \dfrac{1}{100}x_1(t)-\dfrac{3}{100}x_2(t)+\dfrac{2}{200}x_3(t)\\ x_3'(t) &=& \dfrac{2}{100}x_1(t)+\dfrac{1}{100}x_2(t)-\dfrac{3}{200}x_3(t)\end{array}\right.\\ \\ \begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Hay que resolver el problema de condiciones iniciales (P_0):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/100 & 2/100 & 1/200 \\ 1/100 & -3/100 & 2/200 \\ 2/100 & 1/100 & -3/200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -3/100 & 2/100 & 1/200 \\ 1/100 & -3/100 & 2/200 \\ 2/100 & 1/100 & -3/200 \end{pmatrix}$$

Observemos que el determinante de la matriz A vale cero. En efecto, si sumamos las filas $2^{\underline{a}}$ y $3^{\underline{a}}$ de A a la $1^{\underline{a}}$ fila el determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/100 & -3/100 & 2/200 \\ 2/100 & 1/100 & -3/200 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, si hacemos $\lambda = 0$ en el polinomio característico de A, $|\lambda I - A|$, queda:

$$|0I - A| = |-A| = (-1)^3|A| = (-1)^3 \cdot 0 = 0;$$

en consecuencia, $\lambda_1 = 0$ es un valor propio de A. Conocido un valor propio de A es fácil hallar los dos valores propios restantes. Calcularemos en primer lugar el polinomio característico de A. Calculándolo a mano resulta:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{100} & -\frac{2}{100} & -\frac{1}{200} \\ -\frac{1}{100} & \lambda + \frac{3}{100} & -\frac{2}{200} \\ -\frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \lambda + \frac{3}{200} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -\frac{1}{100} & \lambda + \frac{3}{100} & -\frac{2}{200} \\ -\frac{2}{100} & -\frac{1}{100} & \lambda + \frac{3}{200} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{100} & \lambda + \frac{4}{100} & 0 \\ -\frac{2}{100} & \frac{1}{100} & \lambda + \frac{7}{200} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{4}{100})(\lambda + \frac{7}{200}) = 0$$

Busquemos ahora vectores asociados a estos valores propios: c^1, c^2, c^3 asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

$$\boxed{c^1}, \boxed{\lambda_1 = 0}: \quad c^1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{200} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -6x + 4y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 8 = 28$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -6x + 4y = -z \\ 2x - 6y = -2z \end{array} \right. \qquad \text{Tomamos } \; z = 1; \; \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} -6x+4y&=-1\\ 2x-6y&=-2\end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} -6x+4y&=-1\\ 6x-18y&=-6\end{aligned}\right.$$

$$-14y=-7 \Longrightarrow y=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

$$2x=6y-2=3-2=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow c^1=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}; \text{ otro posible } c^1 \text{ es igual a } \boxed{c^1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$$

Utilizaremos este último.

$$\boxed{c^2},\ \boxed{\lambda_2=-\frac{1}{25}=-0,04}=-\frac{4}{100} \qquad c^2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};$$

$$(\lambda_2\, I-A)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4/100+3/100 & -2/100 & -1/200\\ -1/100 & -4/100+3/100 & -2/200\\ -2/100 & -1/100 & -8/200+3/200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1/100 & -2/100 & -1/200\\ -1/100 & -1/100 & -2/200\\ -2/100 & -1/100 & -5/200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff$$

$$\frac{1}{200}\begin{pmatrix}-2 & -4 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-2 & -4 & -1\\ -2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & -5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}=-(20+32+4-8-40-8)=-(56-56)=0.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2x+4y+z&=0\\ 2x+2y+2z&=0\end{aligned}\right. \qquad \Big\| \qquad \left\{\begin{aligned} 2x+4y&=-z\\ x+y&=-z\end{aligned}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0, \quad \text{Tomo } \boxed{z = 1}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ -2x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$2y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}; \quad x = -1 - y = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \boxed{x = -\frac{3}{2}}$$

$$\text{Solución} \quad \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{c^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{c^3}$, $\lambda_3 = -\dfrac{7}{200}$

Vamos derechos al sistema simplificado:

$$\frac{1}{200}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7 \neq 0. \qquad \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 4y = -z \\ 2x + y = -2z \end{cases}$$

$$\boxed{z := 1}$$

$$\begin{cases} x + 4y = -1 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 8y = -2 \\ -2x - y = +2 \end{cases}$$

$$7y = 0 \Longrightarrow \quad \boxed{y = 0}$$

$$\boxed{x = -1} \quad \boxed{c^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Matriz } P = (c^1, c^2, c^3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 1 - 2 + 2 + 3 = 4$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Longrightarrow \quad \text{La solución del problema } (P_0) \text{ es}$$

$$x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x^0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Hallemos el límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$. Por definición

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t\to\infty} x_1(t) \\ \lim_{t\to\infty} x_2(t) \\ \lim_{t\to\infty} x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} & 1 & -3 & -1 \\ \%! & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} =$$

(pues $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$)

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} s_1+s_2+s_3 \\ s_1+s_2+s_3 \\ 2s_1+2s_2+2s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s/4 \\ s/4 \\ s/2 \end{pmatrix}$$

donde $s := s_1 + s_2 + s_3$ es la cantidad total de sal presente en todo momento en el sistema de los tres depósitos.

Sea $c_i(t) = \frac{x_i(t)}{v_i}$ la concentración en el depósito i- ésimo con $i = 1, 2, 3$ y $v_1 = 100, \;\; v_2 = 100, \;\; v_3 = 200$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} c_1(t) = \frac{s/4}{100} = \boxed{\frac{s}{400}};$$

$$\lim_{t\to\infty} c_2(t) = \frac{s/4}{100} = \boxed{\frac{s}{400}};$$

$$\lim_{t\to\infty} c_3(t) = \frac{s/2}{200} = \boxed{\frac{s}{400}}.$$

$s =$ kg. **total** de sal
400 = volumen **total** del sistema (=100+100+200).

Ejercicio.- Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x(t) \\ \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ (e^{7t} + e^{-5t})/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Solución.-

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{4t} + 3e^{-t} \\ 3e^{4t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) - 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) & = & \quad\; - \; x_2(t) \\ x_3'(t) & = & \quad\; - \; x_2(t) - 2x_3(t) \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = -2 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2 Definiciones de derivadas e integrales de funciones matriciales.

Sea $\mathbb{R}^{m\times n}$ el conjunto de matrices $m \times n$ con números reales. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ una función matricial definida en el intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$; es decir, F es una función que asocia a cada número real $t \in [a,b]$ una matriz

$$F(t) := \begin{pmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1}(t) & \cdots & f_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Es equivalente el definir F mediante mn funciones reales (o escalares) $f_{ij} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas todas f_{ij} en $[a,b]$, para todos i,j ($i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$).

Se dice que F es derivable en $t_0 \in [a,b]$ si cada función real f_{ij} es derivable en t_0 y se define la derivada de F en t_0, $F'(t_0)$, como la matriz

$$F'(t_0) := \begin{pmatrix} f'_{11}(t_0) & \cdots & f'_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{m1}(t_0) & \cdots & f'_{mn}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Se dice que F es derivable en $[a,b]$ si F es derivable en todos los puntos de $[a,b]$. En cuyo caso, se define

$$F'(t) := \begin{pmatrix} f'_{11}(t) & \cdots & f'_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{m1}(t) & \cdots & f'_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

para cada $t \in [a,b]$

Proposición 3 *Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ y $G : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times p}$ dos funciones matriciales derivables en $[a,b]$. Entonces para todo $t \in [a,b]$ la función*

$$t \longmapsto F(t)\,G(t)$$

de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^{n\times p}$ es derivable y su derivada viene dada por la fórmula

$$(F(t)\,G(t))' = F'(t)\,G(t) + F(t)\,G'(t).$$

Nota.- Obsérvese el parecido de esta fórmula con la derivada de un producto de funciones reales f y g:

$$(f(t)\,g(t))' = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t).$$

La demostración de la Proposición 3 es una mera consecuencia –aunque larga– de la definición del producto de dos matrices y de la fórmula última.

Se dice que la función matricial $F : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ es integrable si lo son cada una de las funciones reales f_{ij} y se define la integral $\int_a^b F(t)\,dt$ así:

$$\int_a^b F(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_{11}(t)\,dt & \cdots & \int_a^b f_{1n}(t)\,dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b f_{m1}(t)\,dt & \cdots & \int_a^b f_{mn}(t)\,dt \end{pmatrix}$$

El teorema fundamental del cálculo infinitesimal se puede extender a funciones matriciales de la siguiente manera:

Teorema 4 (Teorema Fundamental del Cálculo. Versión matricial).
Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ una función continua (i.e. cada f_{ij} es continua). Entonces la función

$$H(t) := \int_a^t F(s)\,ds$$

es derivable y para todo $t \in [a, b]$,

$$H'(t) = F(t).$$

La demostración del Teorema 4 es consecuencia fácil de la definición de la integral de una función matricial y del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones reales.

3 Sistemas diferenciales lineales no homogéneos

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ una función vectorial continua. Queremos hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(0) = x^0 \end{array} \right. , \quad x^0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \text{ dado.} \tag{23}$$

Suponemos que la matriz A tiene los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, simples. Entonces sabemos que existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{siendo} \qquad D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hagamos el cambio de variable

$$y(t) = P^{-1}x(t)$$

en (23):

$$\begin{gathered} y'(t) = P^{-1}x'(t); \quad \Longrightarrow \quad x'(t) = Py'(t) \quad \Longrightarrow \\ Py'(t) = APP^{-1}x(t) + b(t) \quad \Longrightarrow \\ y'(t) = P^{-1}APP^{-1}x(t) + P^{-1}b(t) \quad \Longrightarrow \\ y'(t) = D\,y(t) + h(t); \text{ llamando } h(t) := P^{-1}b(t) \end{gathered}$$

Así el problema (23) se transforma en el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Dy(t) + h(t) \\ y(0) = y^0, \end{array} \right. \qquad \text{con } y^0 = P^{-1}x^0 \tag{24}$$

Lema 5

$$(e^{Dt})' = De^{Dt}$$

Demostración.

$$e^{Dt} := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}; \text{ luego}$$

$$(e^{Dt})' = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$\square$

Teorema 6 *La solución del problema (24) viene dada por*

$$y(t) = e^{Dt}\left[\int_0^t e^{-Ds}h(s)ds + y^0\right] \tag{25}$$

Demostración.

$$y'(t) = De^{Dt}\left[\int_0^t e^{-Ds}h(s)ds + y^0\right] + e^{Dt}\left[e^{-Dt}h(t)\right]$$

$$= Dy(t) + e^{Ot}h(t) = Dy(t) + Ih(t) = Dy(t) + h(t)$$

Además

$$y(0) = e^{O}\left[\int_0^0 e^{-Ds}h(s)ds + y^0\right] = Iy^0 = y^0.$$

$\square$

Observación.- La solución de (23), se obtiene deshaciendo el cambio de variables

$$y(t) = P^{-1}x(t); \implies$$

$$x(t) = Py(t) \tag{26}$$

De donde

$$x(t) = P\left\{e^{Dt}\left[\int_0^t e^{-Ds}P^{-1}b(s)ds + P^{-1}x^0\right]\right\} \quad \implies$$

$$x(t) = Pe^{Dt}\int_0^t e^{-Ds}P^{-1}b(s)ds + Pe^{Dt}P^{-1}x^0 \tag{27}$$

La fórmula (27) es engorrosa, siendo más fáciles de aplicar las fórmulas (25) y (26).

Ejemplo: Resolver el sistema diferencial lineal no homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

que satisface la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 36 =$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35$$

Valores propios de *A*: Son las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0;$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 7 \\ \\ -5 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 7, \qquad \lambda_2 = -5$$

Vectores propios de *A*: Vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 - 1 & -12 \\ -3 & 7 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \iff -3x_1 + 6x_2 = 0 \iff -x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\iff 2x_2 = x_1; \ \text{tomamos } x_2 := 1; \ \text{de donde } x_1 = 2$$

Así pues,

$$c^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado a λ_1.

Vector propio de A asociado a $\lambda_2 = -5$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -5-1 & -12 \\ -3 & -5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -6x_1 - 12x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{array} \right. \iff x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_1 = -2x_2;$$

tomamos $x_2 := 1$; de aquí se sigue que $x_1 = -2$.

Por lo tanto,

$$c^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado a λ_2.

Construyamos la matriz 2×2

$$P := (c^1, c^2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{como } |P| = 2 + 2 = 4 \neq 0,$$

se sigue que P es invertible. Hallamos la matriz inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix};$$

comprobamos que efectivamente es la inversa:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hagamos el producto $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 28 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} =: D$$

$$e^{Dt} := \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de variable $y(t) = P^{-1}x(t)$ en el problema

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(0) = x^0 \end{array} \right.$$

resulta

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Dy(t) + h(t) \\ y(0) = y^0 \end{array} \right.$$

con

$$h(t) = P^{-1}b(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t+2 \\ -t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+2)/4 \\ (-t+2)/4 \end{pmatrix}$$

$$y^0 = P^{-1}x^0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

La solución del problema (2) viene dada por la fórmula:

$$y(t) = e^{Dt} \left[\int_0^t e^{-Ds} h(s) ds + y^0 \right]$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \left[\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-7s} & 0 \\ 0 & e^{5s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (s+2)/4 \\ (-s+2)/4 \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{4} \int_0^t \begin{pmatrix} (s+2)e^{-7s} \\ (-s+2)e^{5s} \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t (s+2)e^{-7s} ds \\ \int_0^t (-s+2)e^{5s} ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora las integrales $\int_0^t (s+2)e^{-7s} ds$ e $\int_0^t (-s+2)e^{5s} ds$. Utilizaremos la regla de integración por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

$$\int (s+2)e^{-7s} ds = \frac{(s+2)e^{-7s}}{(-7)} + \frac{1}{7} \int e^{-7s} ds = \frac{(s+2)e^{-7s}}{-7} - \frac{1}{49} e^{-7s}$$

$$\left. \begin{array}{r} u = s+2 \\ dv = e^{-7s} ds \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} du = ds \\ v = e^{-7s}/(-7) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int (s+2)e^{-7s}ds = \frac{-7(s+2)e^{-7s} - e^{-7s}}{49} = \frac{e^{-7s}[-7s-14-1]}{49} =$$

$$\frac{e^{-7s}[-7s-15]}{49}$$

$$\Longrightarrow \int_0^t (s+2)e^{-7s}ds = \left. \frac{-e^{-7s}[7s+15]}{49} \right|_0^t =$$

$$\frac{-e^{-7t}[7t+15]}{49} + \frac{15}{49} = \frac{15 - e^{-7t}(15+7t)}{49}.$$

$$\int (-s+2)e^{5s}ds = \frac{(-s+2)}{5}e^{5s} + \frac{1}{5}\int e^{5s}ds = \frac{(-s+2)}{5}e^{5s} + \frac{1}{25}\,e^{5s}; \;\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& -s+2 \\ dv &=& e^{5s}ds \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} du &=& -ds \\ v &=& e^{5s}/5 \end{array}$$

$$\int (-s+2)e^{5s}ds = \frac{-5s\,e^{5s} + 10e^{5s} + e^{5s}}{25} = \frac{e^{5s}(11-5s)}{25}$$

$$\int_0^t (-s+2)e^{5s}ds = \frac{e^{5t}(11-5t)-11}{25}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (15 - e^{-7t}(15+7t))/49 \\ (e^{5t}(11-5t)-11)/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (15e^{7t} - (15+7t))/49 \\ ((11-5t) - 11e^{-5t})/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{7t}/2 \\ e^{-5t}/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (15e^{7t} - 15 - 7t - 98e^{7t})/196 \\ (11 - 5t - 11e^{-5t} + 50e^{-5t})/100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, que

$$y(t) = \begin{pmatrix} (-83e^{7t} - 7t - 15)/196 \\ (39e^{-5t} - 5t + 11)/100 \end{pmatrix}.$$

Deshaciendo el cambio de variables se tiene que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Py(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-83e^{7t} - 7t - 15)/196 \\ (39e^{-5t} - 5t + 11)/100 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-83e^{7t} - 7t - 15)/98 + (-39e^{-5t} + 5t - 11)/50 \\ (-83e^{7t} - 7t - 15)/196 + (39e^{-5t} - 5t + 11)/100 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-4150e^{7t} - 350t - 750 - 3822e^{-5t} + 490t - 1078)/4900 \\ (-8300e^{7t} - 700t - 1500 + 7644e^{-5t} - 980t + 2156)/19600 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-4150e^{7t} + 140t - 1828 - 3822e^{-5t})/4900 \\ (-8300e^{7t} - 1680t + 656 + 7644e^{-5t})/19600 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comprobación de la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4150 - 1828 - 3822)/4900 \\ (-8300 + 656 + 7644)/19600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios:

1.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \\ \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.- Hallar la solución del sistema diferencial

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

que verifica la condición inicial

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}.$$

SOLUCION.-

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3t^2/4 + t/2 + 1/8 - te^{2t}/2 \\ -t^2/4 - t - 3/8 + e^{2t}/2 + te^{2t}/2 \end{pmatrix}.$$

3.- Considerar el sistema diferencial lineal no homogéneo de coeficientes constantes

$$x'(t) = Ax(t) + ve^{\lambda_0 t} \tag{1}$$

donde v es un vector propio de A asociado al valor propio λ_0. Además, supongamos que A tiene n vectores propios linealmente independientes $v^1, v^2, \ldots, v^n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

(a) Demostrar que (1) no tiene ninguna solución de la forma

$$\psi(t) = ae^{\lambda_0 t},$$

con a vector.

[**Indicación.-** Escribir $a = \alpha_1 v^1 + \cdots + \alpha_n v^n$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números].

(b) Demostrar que (1) tiene una solución $\varphi(t)$ de la forma

$$\varphi(t) = ae^{\lambda_0 t} + bte^{\lambda_0 t},$$

con a y b vectores.

[**Indicación.-** Demostrar que b es un vector propio de A asociado al valor propio λ_0 y elegirlo de manera que podamos resolver la ecuación

$$(A - \lambda_0 I)a = b - v,$$

respecto de la incógnita a].

En cada uno de los ejercicios 4, 5 y 6, encontrar una solución particular $\varphi(t)$ del sistema diferencial dado de la forma $\varphi(t) = e^{\lambda_0 t}(a + bt)$ con a, b vectores.

4.-

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

5.-

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

SOLUCION.-

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t}.$$

6.-

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}.$$

7.- **Ejercicio.**

Considerar el siguiente proceso. Una partícula se mueve en el intervalo [0,1] hasta que alcanza un extremo, en ese momento cambia de sentido y se mueve en sentido contrario hasta que alcanza el otro extremo, y así sucesivamente. La partícula empieza en el punto c y se mueve hacia la derecha con velocidad $a > 0$ (es decir, de acuerdo con la ley de movimiento $\frac{du}{dt} = a$). Cuando se mueve hacia la izquierda lleva velocidad $-b$, $b > 0$ (es decir, de acuerdo con la ley de movimiento $\frac{du}{dt} = -b$).

Encontrar una expresión que da la posición de la partícula en el instante t.

8.- **Ejercicio.**

Supongamos que las ecuaciones de movimiento son $\frac{du}{dt} = au$, $\frac{du}{dt} = -bu$, respectivamente; resolver el mismo problema que en el ejercicio 7.

9.- **Ejercicio.**

Sea $a \in \mathbb{R}$, ¿cuántas soluciones de $x'(t) + ax(t) = 1$ satisfacen la condición de que existe el $\lim_{t\to\infty} x(t)$? Considerar por separado los casos $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$.

10.- **Ejercicio.**

Considerar la misma cuestión que en el ejercicio 9 para

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t)$$

suponiendo que ahora $a(t)$ y $f(t)$ son funciones para las que existen

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Problema.

Hallar la solución $x(t)$ del problema de condiciones iniciales:

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x(t) + x(1) \\ \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Solución.- Llamemos $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} := x(1)$ y resolvamos el problema

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x(t) + m \\ \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Con $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = D$. Haciendo el cambio de variables $y(t) = P^{-1}x(t)$ queda

$$\left\{ \begin{aligned} y'(t) &= Dy(t) + n, \\ \\ y(0) &= y^0 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

siendo

$$n = P^{-1}m; \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}; \quad y^0 = P^{-1}x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 \\ -m_1 + 2m_2 \end{pmatrix}$$

Solución de (3):

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{4} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-7s} & 0 \\ 0 & e^{5s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 \\ -m_1 + 2m_2 \end{pmatrix} ds \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{4} \int_0^t \begin{pmatrix} (m_1 + 2m_2)e^{-7s} \\ (-m_1 + 2m_2)e^{5s} \end{pmatrix} ds \right] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} (m_1 + 2m_2) \int_0^t e^{-7s} ds \\ \\ (-m_1 + 2m_2) \int_0^t e^{5s} ds \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m_1 + 2m_2) \left. \dfrac{e^{-7s}}{(-7)} \right|_0^t \\ \\ (-m_1 + 2m_2) \left. \dfrac{e^{5s}}{5} \right|_0^t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m_1 + 2m_2) \frac{1}{(-7)} (e^{-7t} - 1) \\ (-m_1 + 2m_2) \frac{1}{5} (e^{5t} - 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{m_1 + 2m_2}{7}(1 - e^{7t}) \\ \frac{-m_1 + 2m_2}{5}(1 - e^{-5t}) \end{pmatrix} ; \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Py(t) =$$

$$x(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{m_1 + 2m_2}{7}(1 - e^{7t}) \\ \frac{-m_1 + 2m_2}{5}(1 - e^{-5t}) \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$\begin{matrix} m = x(1) \\ \downarrow \\ \Longrightarrow \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{m_1 + 2m_2}{7}(1 - e^{7}) \\ \frac{-m_1 + 2m_2}{5}(1 - e^{-5}) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2m_1 + 4m_2}{28}(1 - e^7) + \frac{2m_1 - 4m_2}{20}(1 - e^{-5}) \\ -\frac{m_1 + 2m_2}{28}(1 - e^7) + \frac{-m_1 + 2m_2}{20}(1 - e^{-5}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1-e^7}{14} m_1 + \frac{1-e^{-5}}{10} m_1 - \frac{1-e^7}{7} m_2 - \frac{1-e^{-5}}{5} m_2 \\ -\frac{1-e^7}{28} m_1 - \frac{1-e^{-5}}{20} m_1 - \frac{1-e^7}{14} m_2 + \frac{1-e^{-5}}{10} m_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (1 + \frac{1-e^7}{14} - \frac{1-e^{-5}}{10}) m_1 + (\frac{1-e^7}{7} + \frac{1-e^{-5}}{5}) m_2 = 0 \\ \\ (\frac{1-e^7}{28} + \frac{1-e^{-5}}{20}) m_1 + (1 + \frac{1-e^7}{14} - \frac{1-e^{-5}}{10}) m_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -77,3588 & -156,3204 \\ -39,0801 & -78,3588 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det\begin{pmatrix} -77,3588 & -156,3204 \\ -39,0801 & -78,3588 \end{pmatrix} = -47,2660$ se tiene que $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; lo que implica que $x(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; como era de esperar; pues la solución de (2) es única.

Resolvamos un problema análogo:

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x(t) + x(1) \\ \\ x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Llamamos

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = x(1) \quad \Longrightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{m_1+2m_2}{7}(1-e^{7t}) \\ \frac{-m_1+2m_2}{5}(1-e^{-5t}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{7t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{m_1+2m_2}{7}(1-e^{7t}) \\ \frac{-m_1+2m_2}{5}(1-e^{-5t}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{7t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+\frac{1-e^7}{14}-\frac{1-e^{-5}}{10})m_1 + (\frac{1-e^7}{7}+\frac{1-e^{-5}}{5})m_2 = -e^7 - e^{-5}\% \\ (\frac{1-e^7}{28}+\frac{1-e^{-5}}{20})m_1 + (1+\frac{1-e^7}{14}-\frac{1-e^{-5}}{10})m_2 = \frac{-e^7+e^{-5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,6313 \\ 9,3073 \end{pmatrix}$$

De donde,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1,9976(1-e^{7t})}{4} - \frac{2e^{7t}}{4} \\ \frac{4,6492(1-e^{-5t})}{4} + \frac{2e^{-5t}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0024e^{7t} - 1,9976 \\ -2,6492e^{-5t} + 4,6492 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$