Ecuación diferencial de variables separadas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden tiene la forma

$$x' = h(t, x) \tag{1}$$

donde h es una función de dos variables t, x. Buscar una *solución* de la ecuación (1) es buscar una función derivable $u(t)$ definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$

$$u : I \to \mathbb{R}$$

tal que $\forall t \in I$ se verifique que

$$u'(t) = h(t, u(t)).$$

Advertencia.- Es preciso distinguir el papel de las variables t y x. En (1) t es la *variable independiente* y x es la *variable dependiente (o función)*; en este caso x depende de $t : x(t)$. La función *incógnita* de (1) es x.

Pero en la función $h(t, x)$ tanto la variable t como la variable x juegan papeles similares: son las *dos variables independientes* de la función h.

Se deberá tener cuidado con esta duplicidad de significados de la variable x.

La ecuación diferencial lineal $x' = a(t)x + b(t)$ es un caso especial de (1), donde

$$h(t, x) = a(t)x + b(t)$$

siendo a y b funciones continuas de la variable real t.

Hay otro caso particular importante, que vamos a considerar ahora. Es aquel en que $h(t, x)$ puede factorizarse en producto de una función de t por una función de x:

$$h(t, x) = f(t)\, g(x); \tag{2}$$

por ejemplo, esto sucede con la función

$$h(t, x) = t^2 e^x + t^2 \operatorname{sen} x + te^x + t \operatorname{sen} x$$

pues h puede reescribirse como

$$h(t, x) = (t^2 + t)(e^x + \operatorname{sen} x).$$

Aquí sería

$$f(t) = t^2 + t \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^x + \operatorname{sen} x.$$

Consideraremos las ecuaciones diferenciales (1) en que h tiene la forma (2). Es decir, las de la forma

$$x' = f(t)\, g(x) \tag{3}$$

Estas ecuaciones diferenciales se llaman de *variables separadas*. Se supone que la función $g(x)$ es distinta de cero en el intervalo que interesa. La ecuación (3) se resuelve de la siguiente manera: Se escribe

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

y se sustituye en (3)

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\, g(x) \tag{4}$$

En (4) multiplicamos los dos miembros por dt:

$$dx = f(t)\, g(x)\, dt \tag{5}$$

Dividimos los dos miembros de (5) por $g(x)$:

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt \tag{6}$$

A continuación *integramos* los dos miembros de (6) y resulta

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt + C \tag{7}$$

donde C es la constante arbitraria de integración.

Si llamamos

$$G(x) := \int \frac{dx}{g(x)}, \qquad F(t) := \int f(t)\, dt$$

la fórmula (7) puede abreviarse a

$$G(x) = F(t) + C. \tag{8}$$

La expresión (8) representa la *solución general* de la ecuación diferencial (3). No es claro lo que esto quiere decir. Si a partir de la fórmula (8) pudiéramos despejar x como función de t:

$$x = G^{-1}(F(t) + C) = \varphi(t, C)$$

obtendríamos x como la solución general de (3). Para cada valor particular de la constante C se produciría una solución concreta de (3). Si estuviéramos interesados en hallar la solución de (3) que verificase

$$x(t_0) = x_0,$$

hallaríamos C a partir de

$$x_0 = \varphi(t_0, C);$$

obteniendo $C = C_0$ y la solución $u(t) = \varphi(t, C_0)$ de

$$\begin{cases} x' = f(t)\, g(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pero no siempre es posible despejar x en función de t en la fórmula (8). ¿Qué quiere decir que (8) es la solución general de la ecuación diferencial (3)? Quiere decir lo siguiente:

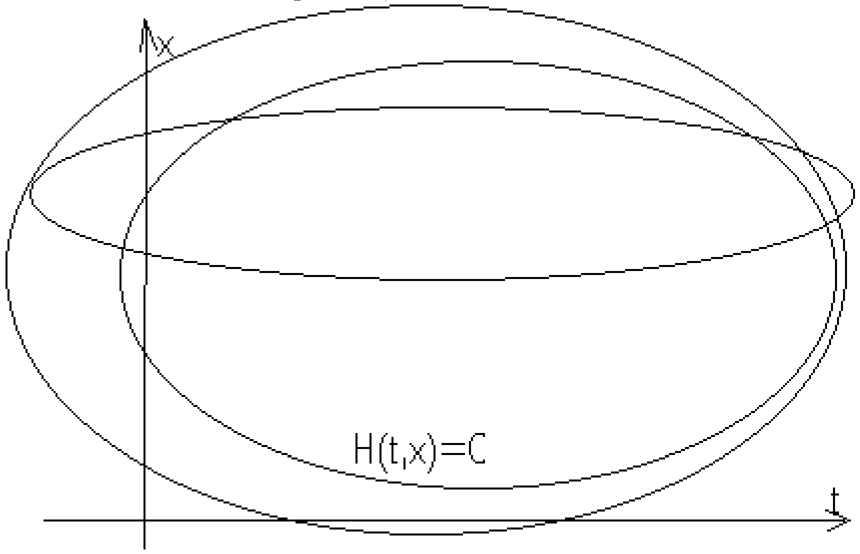
Si hacemos

$$H(t, x) := G(x) - F(t)$$

para cada valor de la constante C, la ecuación

$$H(t, x) = C \tag{9}$$

representa una curva en el plano t, x:

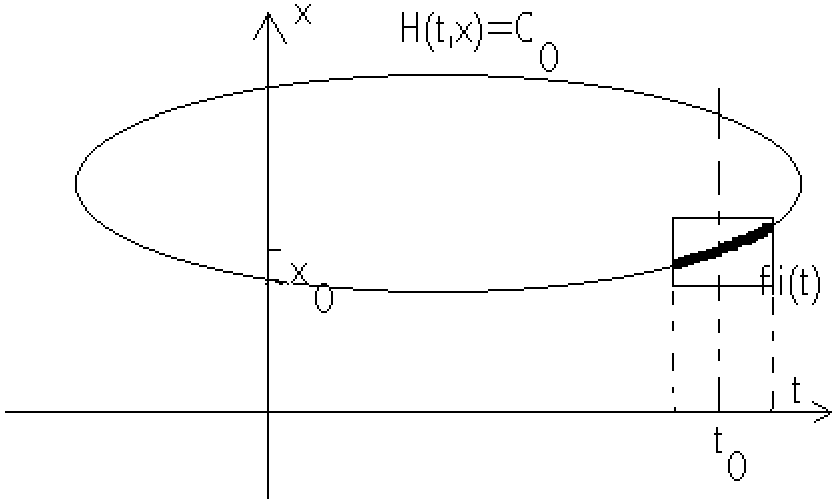


Sea $C_0 := H(t_0, x_0)$. Supongamos que un trozo de la curva $H(t, x) = C_0$ en torno al punto (t_0, x_0), es la gráfica de una función de una variable $x = \varphi(t)$ definida en un intervalo I. Entonces la función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ es una solución de (3) en el sentido de que es derivable y $\forall t \in I$,

$$\varphi'(t) = f(t)\, g(\varphi(t)).$$

y

$$\varphi(t_0) = x_0.$$



Nota.- La *clave* de este método de resolución de la ecuación (3) radica en el paso de (6) a (7). En (7) al hacer la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{g(x)}$$

no se piensa que x es función (incógnita) de t, sino que se mira a x como una variable independiente: la variable de integración.

Dicho de otro modo, en (7)

$$\int \frac{dx}{g(x)} \neq \int \frac{x'(t)\,dt}{g(x(t))}.$$

Por fortuna, hay un teorema que apuntala todo esto y es el siguiente

Teorema 1 .- *Sea la ecuación diferencial*

$$x' = f(t)\,g(x) \tag{3}$$

con $f(t)$ continua para $a < t < b$ y $g(x)$ continua y distinta de cero para $c < x < d$. Sean F y G integrales indefinidas (o primitivas) de f y $\frac{1}{g}$ en (a,b) y (c,d), respectivamente.

Sea (t_0, x_0) un punto cualquiera del rectangulo $Q : a < x < b, c < y < d$. Definamos $C_0 := G(x_0) - F(t_0)$. Entonces la ecuación

$$G(x) = F(t) + C_0$$

define x implícitamente como una función φ de t en un cierto intervalo I que contiene a t_0. Además, φ es una solución de (3), $\varphi(t_0) = x_0$, y es la única solución que cumple esta condición inicial.

No damos la demostración. Ésta puede verse en los libros:
[1] Manuel Valdivia: *Análisis Matemático III*, (UNED, Madrid).
[2] Otto Plaat: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, (Edit. Reverté, Barcelona, 1974), pág. 37, Teorema 2.1.

Comentario

Dada la ecuación diferencial de variables separadas

$$f_2(x)\,dx = f_1(t)\,dt \tag{10}$$

con $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}, \quad f_2 : I_2 \to \mathbb{R}, \quad$ y $\quad f_2(x) \neq 0 \ \forall x \in I_2$, entonces la solución de (10) que verifica

$$x(t_0) = x_0$$

(con $t_0 \in I_1, \ x_0 \in I_2$)
viene dada (implícitamente) por

$$\int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt \tag{11}$$

[Admita el lector el abuso de notación habido en (11). En caso contrario, reescriba (11) así:

$$\int_{x_0}^{x} f_2(\xi)\,d\xi = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\,d\tau].$$

En efecto, la función $G(x) := \int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx$ es una primitiva de $f_2(x)$; la función $F(t) = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt$ es una primitiva de $f_1(t)$. La condición (8) se escribe aquí así

$$\int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt + C \tag{12}$$

Por consiguiente, en virtud del Teorema 1 , la ecuación (13) define x implícitamente como una función φ de t en un cierto intervalo que contiene a t_0; además φ es solución de (10) y $\varphi(t_0) = x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt. \tag{13}$$

Ejercicio.- Sean α, β números reales distintos. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x) \tag{14}$$

donde k es una constante.

Solución.- La ecuación diferencial es de variables separadas. Por lo tanto, esta ecuación se *integra* así

$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \int k\,dt + C. \tag{15}$$

Para hallar la integral de la izquierda, descomponemos la fracción racional

$$\frac{1}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

en fracciones simples. Para ello tenemos que determinar A_1 y A_2 de manera que

$$\frac{1}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{A_1}{\alpha - x} + \frac{A_2}{\beta - x}$$

De donde,

$$\frac{1}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{A_1(\beta - x) + A_2(\alpha - x)}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{-(A_1 + A_2)x + (A_1\beta + A_2\alpha)}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

Luego,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1\beta + A_2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A_2 = -A_1 \ , \quad \Longrightarrow \quad 1 = A_1\beta - A_1\alpha \ , \quad \Longrightarrow$$

$$1 = A_1(\beta - \alpha) \ , \quad \Longrightarrow \quad A_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} \ , \quad \Longrightarrow \quad A_2 = \frac{-1}{\beta - \alpha}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int \frac{dx}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - \alpha}\int \frac{dx}{\beta - x}$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha}\left(-\ln|\alpha - x|\right) + \frac{1}{\beta - \alpha}\ \ln|\beta - x|$$

[pues $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ya que $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$].

$$= \frac{1}{\beta - \alpha}\ln\left|\frac{\beta - x}{\alpha - x}\right|$$

De (15) deducimos

$$\ln\left|\frac{\beta - x}{\alpha - x}\right| = (\beta - \alpha)kt + C$$

Elevando e a los dos miembros,

$$\left|\frac{\beta - x}{\alpha - x}\right| = C_1 e^{(\beta-\alpha)kt} \quad , \quad \text{con} \quad C_1 := e^C;$$

de donde

$$\frac{\beta - x}{\alpha - x} = C_2 e^{(\beta-\alpha)kt} \quad , \quad \text{con} \quad C_2 = \pm C_1. \tag{16}$$

Supongamos ahora que añadimos a la ecuación diferencial (14) la condición inicial

$$x(0) = 0;$$

es decir que $x = 0$ cuando $t = 0$. Imponiendo esta condición en (16) resulta

$$\frac{\beta}{\alpha} = C_2.$$

Por lo tanto la solución de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

viene dada por

$$\frac{\beta - x}{\alpha - x} = \frac{\beta}{\alpha} e^{(\beta-\alpha)kt} \quad ; \quad \Longrightarrow \quad \beta - x = \frac{\beta}{\alpha} (\alpha - x) e^{(\beta-\alpha)kt} \quad ;$$

$$\alpha\beta - \alpha x = \alpha\beta e^{(\beta-\alpha)kt} - \beta x e^{(\beta-\alpha)kt} \quad ;$$

$$\alpha\beta \left[1 - e^{(\beta-\alpha)kt}\right] = x\left[\alpha - \beta e^{(\beta-\alpha)kt}\right] \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\alpha\beta \left[1 - e^{(\beta-\alpha)kt}\right]}{\alpha - \beta e^{(\beta-\alpha)kt}} \qquad (\text{si } \alpha \neq \beta)$$

Problema 3. Cinética química

Se combinan 260 g. de $CH_3COOC_2H_5$ (acetato etílico) con 175 g. de $NaOH$ (hidróxido de sodio) en un volumen de V litros de solución acuosa, para producir CH_3COONa (acetato de sodio) y C_2H_5OH (alcohol etílico), tomando la reacción

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

como irreversible. Al cabo de 10 minutos, se han formado 60 g. de acetato de sodio. Sabiendo que la reacción obedece a la *ley de acción de masas*: (a) calcúlese la constante de velocidad; (b) hállese el número de gramos de acetato de sodio y de alcohol etílico presentes al cabo de 1/2 hora.

(Sugerencia: utilícense los pesos atómicos: $C = 12'01, \quad H = 1'008$, $O = 16, \quad Na = 22'997$).

acetato etílico	+	hidróxido de sodio	$\longrightarrow$	acetato de sodio	+	alcohol etílico

Solución.- Llamemos A al acetato etílico, B al hidróxido de sodio, P al acetato de sodio y Q al alcohol etílico, para abreviar. La reacción se reescribe así

$$A + B \longrightarrow P + Q.$$

En esta reacción, una molécula de A se combina con una molécula de B para dar una molécula de P y una molécula de Q.

Sabemos que un *mol* de una sustancia química está constituido por N moléculas de la sustancia, donde $N := 6'022045 \times 10^{23}$ es el llamado *número de Avogadro*. Por definición de mol, todo mol de *cualquier* sustancia química contiene el mismo número de moléculas: N. Por lo tanto, en nuestra reacción cada mol de A reacciona con un mol de B para dar lugar a un mol de P y un mol de Q.

Se llama *peso molecular* de una sustancia química al número que resulta de multiplicar los pesos atómicos de cada elemento químico (que la constituye) por el número de átomos del mismo presentes en la molécula y sumar las diferentes cantidades obtenidas para cada elemento químico interviniente. Por ejemplo, el peso molecular de $A = CH_3COOC_2H_5$ es

$$m_A = 4 \cdot 12'01 + 8 \cdot 1'008 + 2 \cdot 16 = 88'104.$$

Un mol de una sustancia química tiene una masa igual al peso molecular de la misma expresado en gramos. Así, un mol de A tiene una masa de $88'104$ g.

Pongamos en un esquema la información dada en el enunciado, en función del tiempo medido en minutos:

	A	$+$	B	$\longrightarrow$	P	$+$	Q
$t = 0$	260 g	$+$	175 g				
$t = 10$					60 g		
$t = 30$					?		?

Calculemos los pesos moleculares de B, P y Q:
m_B= peso molecular de $B = 22'997 + 16 + 1'008 = 40'005$.
m_P= peso molecular de $P = 2 \cdot 12'01 + 3 \cdot 1'008 + 2 \cdot 16 + 22'997 = 82'041$.
m_Q= peso molecular de $Q = 2 \cdot 12'01 + 6 \cdot 1'008 + 16 = 46'068$.

Observemos que

$$m_A + m_B = 128'109 = m_P + m_Q.$$

Sea $x(t)$ el número de moles que han reaccionado durante el intervalo de tiempo de 0 a t minutos (o al cabo de t minutos desde que comenzó la reacción). Esto quiere decir que en ese intervalo de tiempo, $x(t)$ moles de A han reaccionado con $x(t)$ moles de B para dar $x(t)$ moles de P y $x(t)$ moles de Q.

Supongamos que se puede aplicar a esta reacción la ley de acción de masas. Los químicos saben cuándo, cómo y por qué se aplica esta ley.

LEY DE ACCIÓN DE MASAS: *Si la temperatura se mantiene constante, la velocidad de una reacción química es proporcional al producto de las concentraciones de las sustancias que toman parte en la reacción.*

Sean α el número inicial de moles de A y β el número inicial de moles de B:

$$\alpha = \frac{260 \text{ g}}{88'104 \text{ g/mol}} = 2'951 \text{ moles};$$

$$\beta = \frac{175 \text{ g}}{40'005 \text{ g/mol}} = 4'374 \text{ moles}.$$

Aquí se tiene pues que $\alpha < \beta$. Obviamente $x(0) = 0$.

La ley de acción de masas se traduce en:

$$\frac{d(x(t)/V)}{dt} = k\frac{(\alpha - x(t))}{V} \cdot \frac{(\beta - x(t))}{V}. \tag{17}$$

En el minuto t, $\alpha - x(t)$ son los moles de A que quedan sin reaccionar. Luego,

$$\frac{\alpha - x(t)}{V}$$

son los moles de A por litro que quedan; es decir, la concentración de A. Los químicos suelen denotar esta concentración así

$$[A] := \frac{\alpha - x(t)}{V}.$$

Análogamente,

$$[B] := \frac{\beta - x(t)}{V}$$

sería la concentración de B en moles/litro.

El volumen V en $x(t)/V$ en el primer miembro de (17) podría eliminarse incorporándolo a la constante k. Pero, dado que es usual expresar k en unidades $\text{litro} \times \text{mol}^{-1} \times \text{min}^{-1}$, nosotros mantendremos V.

La ecuación (17) es equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = K(\alpha - x)(\beta - x) \tag{18}$$

llamando $K := k/V$ y omitiendo la t.

La constante k se llama *constante de velocidad*.

La solución de la ecuación diferencial de variables separadas (18) que verifica $x(0)=0$ viene dada por la fórmula

$$x(t)=\frac{\alpha\beta\left[1-e^{(\beta-\alpha)Kt}\right]}{\alpha-\beta e^{(\beta-\alpha)Kt}}$$

Sustituyendo α y β por sus valores en esta fórmula, resulta

$$x(t)=\frac{12'908\left[1-e^{1'423Kt}\right]}{2'951-4'374e^{1'423Kt}}.$$

La cantidad de 60 g de P equivale a

$$\frac{60 \text{ g}}{82'041 \text{ g/mol}}=0'731 \text{ moles de } P.$$

Por lo tanto,

$$x(10)=0'731.$$

De aquí deduciremos K:

$$0'731=\frac{12'908\left[1-e^{14'23K}\right]}{2'951-4'374e^{14'23K}}.$$

Hacemos a continuación sucesivas operaciones ...

$$\begin{aligned}
2'157-3'197e^{14'23K} &= 12'908-12'908e^{14'23K}\\
9'711e^{14'23K} &= 10'751\\
e^{14'23K} &= 1'107\\
14'23K &= \ln 1'107
\end{aligned}$$

De donde,

$$K=\frac{\ln 1'107}{14'23}=\frac{0'102}{14'23}=0'00714.$$

(Por lo cual, $k=0'00714V$). Como conocemos K podemos escribir la fórmula definitiva para $x(t)$:

$$x(t)=\frac{12'908\left[1-e^{0'0102t}\right]}{2'951-4'374e^{0'0102t}}.$$

De esta fórmula deducimos los moles que han reaccionado al cabo de 30 minutos,

$$x(30)=\frac{12'908\left[1-e^{0'306}\right]}{2'951-4'374e^{0'306}}=$$

$$\frac{12'908[1-1'358]}{2'951-4'374\cdot 1'358}=$$

$$\frac{-4'621}{-2'989} = 1'546 \text{ moles.}$$

$$\Downarrow$$

Número de gramos de P (acetato de sodio) al cabo de 30 min.

$$1'546 \text{ moles} \times 82'041 \text{ g/mol} = 126'84 \text{ g.}$$

Número de gramos de Q (alcohol etílico) al cabo de 30 min.

$$1'546 \text{ moles} \times 46'068 \text{ g/mol} = 71'22 \text{ g.}$$

Problema.- En el Problema anterior, ¿al cabo de cuánto tiempo ha reaccionado el 80% de la masa total inicial (435 g) de reactivos? ¿y el 95%?

Problema.- Se hacen reaccionar tres compuestos químicos A, B y D para producir los compuestos P y Q, de acuerdo con la reacción irreversible

$$A + B + D \longrightarrow P + Q.$$

(Es decir, una molécula de A reacciona con una molécula de B y una molécula de D para dar lugar a una molécula de P más una molécula de Q). Inicialmente se tienen 5 moles de A, 4 moles de B y 3 moles de D. Al cabo de 1 minuto se ha formado 1 mol de P.

Suponiendo que la reacción química obedece a la ley de acción de masas, calcular el número de moles de P, $x(t)$, que se han formado al cabo de t minutos de empezar la reacción. Predecir el valor límite de $x(t)$ cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} x(t)$$

y confirmarlo por medio de la fórmula de $x(t)$.

Vamos a dar a continuación una solución al Problema 4 del Fascículo 2º.

Problema 4. Microbiología

La presencia de toxinas en un cierto medio destruye un cultivo de bacterias a una velocidad proporcional al número de bacterias y a la cantidad de toxinas presentes en el cultivo. Si no hubiera toxinas las bacterias crecerían con una velocidad proporcional a la cantidad total de bacterias existente. Sea $x(t)$ el número de bacterias vivas en el instante t. Supóngase que la cantidad de toxinas crece con una velocidad constante y que la producción de toxinas empieza en el instante $t = 0$.

Establecer una ecuación diferencial para $x(t)$. Resolverla. Una de las curvas que aparecen en este mismo enunciado en el Fascículo 2º es la que representa mejor el comportamiento general de $x(t)$ como función de t. Decir cuál es la elegida y explicar el porqué.

Solución.- Sean las constantes $k > 0, a > 0, x_0 > 0$. Una ecuación diferencial que sirve de modelo matemático para $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - at),$$

junto con la condición inicial $x(0) = x_0$. La cantidad de toxinas en el instante t es at. Según aumenta t desde 0 hasta $1/a$, la cantidad positiva $1 - at$ va disminuyendo y, de este modo, disminuye la velocidad dx/dt. Cuando t pasa de $1/a$, $\varphi(t) := 1 - at$ va siendo negativa y la velocidad dx/dt se hace negativa y así $x(t)$ decrece.

Recordemos que un modelo matemático puede justificarse mediante consideraciones intuitivas, pero que la prueba verdadera de la validez del modelo debería consistir en hacer mediciones en un laboratorio para contrastar la función obtenida $x(t)$ con sus valores observados en determinados instantes de tiempo.

La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - at),$$

es una ecuación lineal homogénea. También es una ecuación diferencial de variables separables; variables que se separan así

$$\frac{dx}{x} = k(1 - at)\, dt.$$

Esto no debe sorprender ya que hay ecuaciones diferenciales que son de varios tipos a la vez. Resolvemos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx(1 - at), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

por el método que queramos y obtenemos

$$x(t) = x_0 e^{k(t - at^2/2)}.$$

Representación gráfica de $x(t)$:

Empezaremos hallando la derivada de $x(t)$ para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $x(t)$, así como sus máximos y mínimos relativos.

$$x'(t) = x_0 e^{k(t - at^2/2)}[k(1 - at)] = 0 \Leftrightarrow 1 - at = 0 \Leftrightarrow t = 1/a.$$

Cuando $0 \leq t < 1/a$, se sigue que $at < 1 \Rightarrow 1 - at > 0 \Rightarrow x'(t) > 0 \Rightarrow x(t)$ es creciente dicho intervalo.

Cuando $1/a < t$, se tiene que $1 < at \Rightarrow 1 - at < 0 \Rightarrow x'(t) < 0 \Rightarrow x(t)$ es decreciente en $1/a \leq t < \infty$.

Por lo tanto, $x(t)$ tiene un máximo en $1/a$. Dicho valor máximo es

$$x(1/a) = x_0 e^{k(1/a - a/2 \cdot 1/a^2)} = x_0 e^{k(1/a - 1/2a)} =$$

$$x_0 e^{k(2/2a - 1/2a)} = x_0 e^{k/2a} > 0.$$

En consecuencia, la gráfica posible de $x(t)$ es (d), (e) o (f).

Estudiemos ahora el límite de $x(t)$ cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_0 e^{k(t - at^2/2)}.$$

¿Ocurre que $\lim_{t\to\infty}(t - at^2/2) = -\infty$? En principio, éste es un límite indeterminado del tipo $\infty - \infty$; es decir, es un límite del tipo

$$\lim_{t\to\infty} (f(t) - g(t)),$$

donde $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Esta indeterminación, se intenta deshacer mediante la operación

$$\lim_{t\to\infty} (f(t) - g(t)) = \lim_{t\to\infty} f(t) \left[1 - \frac{g(t)}{f(t)}\right].$$

Por lo que consideramos

$$\lim_{t\to\infty} \left(t - \frac{at^2}{2}\right) = \lim_{t\to\infty} t \left[1 - \frac{at}{2}\right] = -\infty.$$

Lo que implica que

$$\lim_{t\to\infty} x_0 e^{k(t - at^2/2)} = 0.$$

Por consiguiente, la gráfica (f) queda descartada. Como $x_0 e^{k(t - at^2/2)} > 0$, pues $x_0 > 0$ y $e^u > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, se deduce que la gráfica (e) tampoco es. En consecuencia, la figura que mejor representa el comportamiento de $x(t)$ es la (d). Véase la figura 1

Problema 5. Microbiología. Supongamos que x_0 bacterias se ponen en una solución nutritiva en el instante $t = 0$ y que $x(t)$ es el número de bacterias del cultivo en un momento posterior t. Si el espacio es limitado y los alimentos se suministran de manera regular, la competencia por los alimentos y el espacio actuarán de tal modo que la población se estabilizará en N bacterias. Plantear (y resolver) una ecuación diferencial que pueda servir de modelo matemático para este fenómeno de manera que la solución que verifique la condición inicial $x(0) = x_0$ sea la función

$$x(t) = \frac{N x_0}{x_0 + (N - x_0) e^{-kNt}}$$

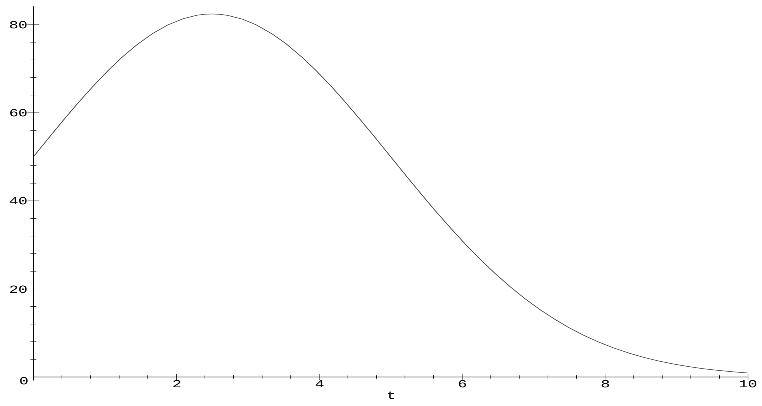


Figura 1: Gráfica (d)

donde k es una constante positiva. Dibujar la gráfica de $x(t)$.

Solución.- Suponemos que cada bacteria da lugar a dos bacterias y que, así, por bipartición se reproducen. Entonces, si no hubiera limitación de espacio el número de bacterias $x(t)$ crecería a una velocidad proporcional al número de bacterias presentes en cada instante:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante positiva. Pero existe una limitación de espacio, que se traduce en que el número máximo posible de bacterias es N. Así cuando $x(t)$ vaya creciendo y aproximándose a N la velocidad (derivada) de crecimiento de $x(t)$ deberá ir tendiendo a 0. Esto hace factible el plantear la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

como modelo matemático de la situación. (Como siempre la última palabra sobre la validez de un modelo, la tiene el acuerdo entre los resultados que predice y las medidas experimentales).

Esta es una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución viene dada integrando los dos miembros de la ecuación

$$\frac{dx}{x(N - x)} = k\,dt,$$

y así obtenemos

$$\int \frac{dx}{x(N - x)} = \int k\,dt + k_0.$$

Para hacer la integral del lado izquierdo, descomponemos en fracciones simples la fracción racional

$$\frac{1}{x(N-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{N-x};$$

de donde,

$$1 = A(N-x) + Bx; \Rightarrow AN = 1, -A + B = 0 \Rightarrow A = 1/N, B = 1/N.$$

De aquí que

$$\int \frac{dx}{x(N-x)} = \frac{1}{N}\left[\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{N-x}\right] = kt + k_0;$$

$$\frac{1}{N}[\ln \mid x \mid - \ln \mid N-x \mid] = kt + k_0;$$

$$\ln\left|\frac{x}{N-x}\right| = kNt + k_0N;$$

$$\left|\frac{x}{N-x}\right| = k_1 \exp(kNt) \quad \text{para una cierta } k_1 \tag{19}$$

dando a t el valor 0 en esta última expresión obtenemos

$$\left|\frac{x_0}{N-x_0}\right| = k_1. \tag{20}$$

De las ecuaciones (19) y (20) resulta que

$$\frac{\frac{x}{N-x}}{\frac{x_0}{N-x_0}} = \exp(kNt)$$

o su equivalente

$$\frac{x}{N-x} = \frac{x_0}{N-x_0}\exp(kNt);$$

lo que sucesivamente da

$$x(N-x_0) = Nx_0\exp(kNt) - xx_0\exp(kNt);$$

$$x[N - x_0 + x_0\exp(kNt)] = Nx_0\exp(kNt);$$

$$x = \frac{Nx_0\exp(kNt)}{N-x_0+x_0\exp(kNt)}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción del segundo miembro de esta ecuación por $\exp(-kNt)$, resulta

$$x(t) = \frac{Nx_0}{(N-x_0)\exp(-kNt)+x_0};$$

como queríamos probar. Esta función $x(t)$ es creciente, pues $\exp(-kNt)$ es decreciente y está en el denominador de la fórmula que define a $x(t)$; corroboraremos esto enseguida con el signo de la derivada primera.

Vemos que

$$x(0) = \frac{Nx_0}{x_0 + N - x_0} = x_0,$$

y que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{Nx_0}{x_0} = N;$$

como era de esperar.

La derivada primera de $x(t)$ es

$$x'(t) = Nx_0 \cdot \frac{-(-kN)(N - x_0)\exp(-kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2};$$

por tanto,

$$x'(t) = \frac{kN^2 x_0 (N - x_0)\exp(-kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2};$$

de aquí se deduce que cuando $N > x_0$, el valor de $x'(t)$ es positivo para todo $t \in [0, \infty)$. Por consiguiente, es este caso, $x(t)$ es creciente en $[0, \infty)$.

Hallemos ahora la derivada segunda de $x(t)$.

$$x''(t) = \frac{-kN \cdot kN^2 x_0 (N - x_0)\exp(-kNt)[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^2}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^4}$$
$$- \frac{2[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)](-kN)(N - x_0) \cdot kN^2 x_0 (N - x_0)\exp(-2kNt)}{[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)]^4}.$$

Deseamos averiguar cuándo es $x''(t) < 0$. Observamos que $x''(t) < 0$ si y sólo si

$$-k^2N^3x_0(N - x_0)\exp(kNt)[x_0 + (N - x_0)\exp(-kNt)] + 2k^2N^3x_0(N - x_0)^2 < 0;$$

que es equivalente a que

$$-k^2N^3x_0^2(N - x_0)\exp(kNt) + k^2N^3x_0(N - x_0)^2 < 0;$$

y esta desigualdad es cierta si y sólo si

$$k^2N^3x_0(N - x_0)[(N - x_0) - x_0\exp(kNt)] < 0 \qquad (21)$$

es verdadera. Pero esta desigualdad es equivalente a que el corchete $[\dots]$ de (21) sea menor que cero.

¿Pará qué valor de t se hace cero $[\dots]$ y, por lo tanto, $x''(t)$? Este corchete $[\dots]$ se hace cero si

$$N - x_0 = x_0 \exp(kNt);$$

es decir, si

$$\frac{N-x_0}{x_0} = \exp(kNt);$$

resolviendo esta última ecuación en la incógnita t, obtenemos el valor

$$t_1 = \frac{1}{kN} \ln \frac{N-x_0}{x_0}.$$

Ahora bien, $\ln x$ es mayor que 0 si y sólo si $x > 1$; esto quiere decir que para que t_1 sea > 0 debe ser

$$\frac{N-x_0}{x_0} > 1;$$

o bien

$$N > 2x_0.$$

Concluímos que si $N > 2x_0$ la función $x(t)$ tiene un punto de inflexión en t_1. Véase la figura 2. Obsérvese que la función crece al principio más lentamente; después tiene una zona de crecimiento rápido (crecimiento exponencial); finalmente se hace lento el crecimiento y la función tiende asintóticamente a N cuando $t \to \infty$. Esta curva es denominada a veces **curva logística** del crecimiento de una población.

Por el contrario, si $N \leq 2x_0$, la función $x(t)$ es cóncava en todo el intervalo $[0, \infty)$ y no tiene punto de inflexión; ya que $N \leq 2x_0$ implica que $N - x_0 \leq x_0; \Rightarrow (N-x_0)/x_0 \leq 1$. De aquí que

$$\ln \frac{N-x_0}{x_0} \leq 0;$$

si $t > 0$, entonces

$$\frac{1}{kN} \ln \frac{N-x_0}{x_0} \leq 0 < t; \Rightarrow \ln \frac{N-x_0}{x_0} < kNt,$$

$$\Downarrow$$

$$N - x_0 < x_0 \exp(kNt).$$

Esto implica que $x''(t) < 0$. Véase la figura 3 . Suponemos en todo momento que $x_0 < N$.

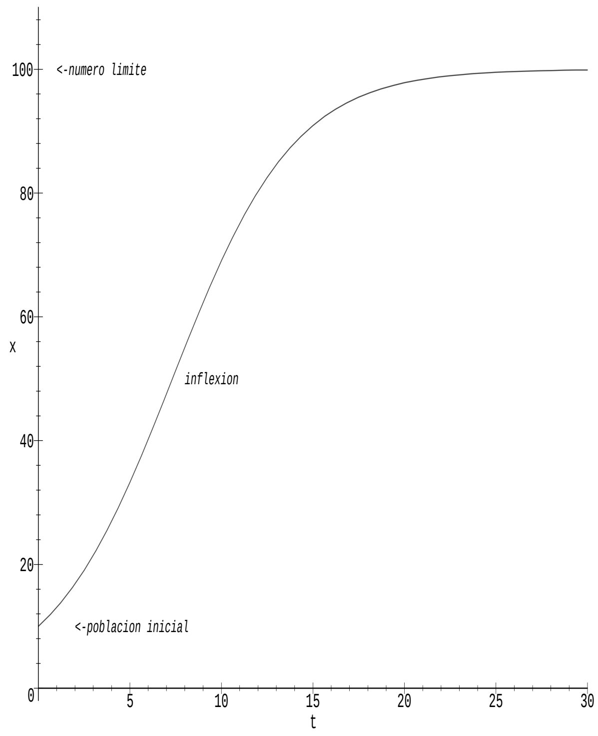


Figura 2: Gráfica de $x(t)$ cuando $N > 2x_0$

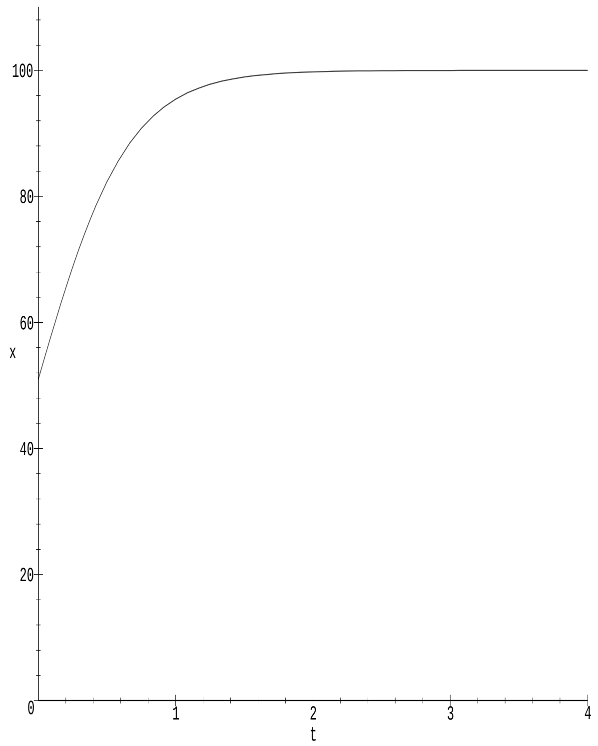


Figura 3: Gráfica de $x(t)$ cuando $N \leq 2x_0$