Continuidad de correspondencias

Gormipa Argrave[1]

18 de diciembre de 2020

[1]Este nombre representa al colectivo formado por Gorka Armentia, Juan-Miguel Gracia y Francisco-Enrique (Paco) Velasco

¿Cómo llegamos a este tema?

$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}, r \in \mathbb{R}_+$

$$B(r, \boldsymbol{a}) := \begin{bmatrix} r & a_1 & & & \\ & r & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r & a_{n-1} \\ & & & & r \end{bmatrix},$$

$$h : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad h(r) := \sigma_{n-k+1}\big(B(r, \boldsymbol{a})\big),$$

$$m := \min_{r \in \mathbb{R}_+} h(r) = h(r_0).$$

Duda

¿Es h estrictamente creciente y suprayectiva como función de $[r_0, \infty)$ en $[m, \infty)$?

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \varepsilon > 0$ ¿es continua la aplicación $\varepsilon \mapsto \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) \leqslant \varepsilon\}$?

¿Cómo llegamos a este tema?, 2

Pseudoespectros

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. $\Lambda_k^{\mathrm{g}}(A) := \{\lambda \in \Lambda(A) : \mathrm{mg}(\lambda, A) \geqslant k\}$; $\|A\| = \sigma_1(A)$.

$$\Lambda_{\varepsilon,k}^{\mathrm{g}}(A) := \bigcup_{\substack{Z\in\mathbb{C}^{n\times n}\\ \|Z-A\|\leqslant\varepsilon}} \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z).$$

$$\Lambda_{\varepsilon,k}^{\mathrm{g}}(A) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) \leqslant \varepsilon\}.$$

$$\Lambda_{\varepsilon}(A) := \bigcup_{\substack{Z\in\mathbb{C}^{n\times n}\\ \|Z-A\|\leqslant\varepsilon}} \Lambda(Z)$$

Teorema 1 (Karow [8], Corollary 2.3.8)

La función

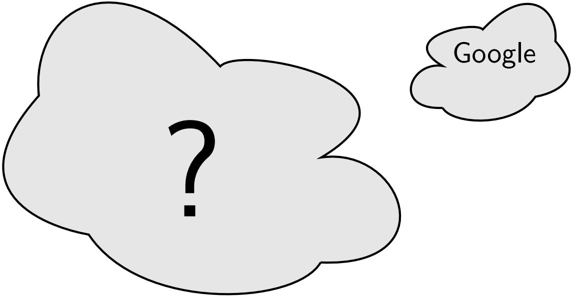
$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\to H(\mathbb{C}) \\ \varepsilon &\longmapsto f(\varepsilon) := \Lambda_\varepsilon(A) \end{aligned}$$

es continua.

Se basó en que la función $Z \mapsto \Lambda(Z)$ de $\mathbb{C}^{n\times n}$ en $H(\mathbb{C})$ es continua.

Pero,

¿es continua $Z \mapsto \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z)$?



Google: "continuity of level sets" $\longrightarrow$ Sukumar et al.

YouTube: "continuity of correspondences" $\longrightarrow$ Rajiv Sethi

Distancia Hausdorff entre compactos $K, L \subset Y$

Y espacio métrico.

$$H(Y) := \{K \subset Y \colon K \text{ compacto no vacío}\}$$

$K, L \in H(Y)$

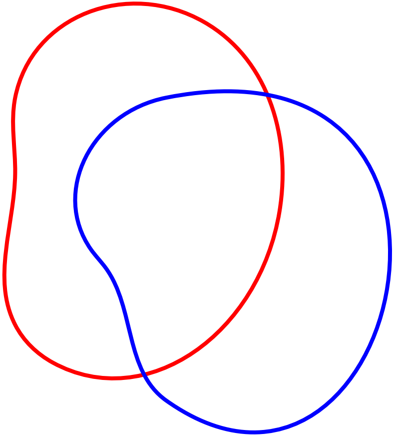
$$\mathrm{d}_H(K, L) := \max \left\{ \max_{z \in K} \mathrm{d}(z, L), \max_{w \in L} \mathrm{d}(w, K) \right\}$$

$S \subset Y, \varepsilon > 0$

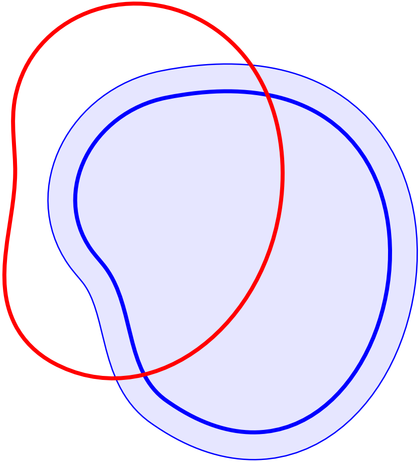
$$B(x, \varepsilon) := \{y \in Y \colon \mathrm{d}(y, x) < \varepsilon\}$$
$$V(S, \varepsilon) := \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon) = \{y \in Y \colon \mathrm{d}(y, S) < \varepsilon\}$$

$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$

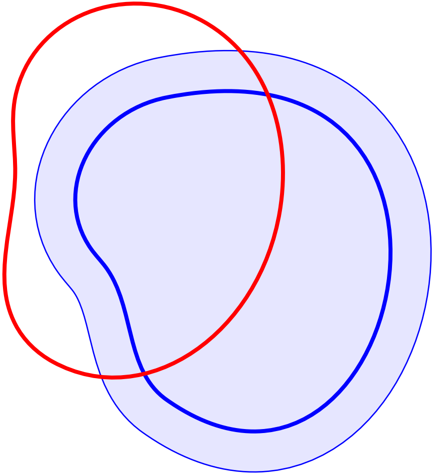
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



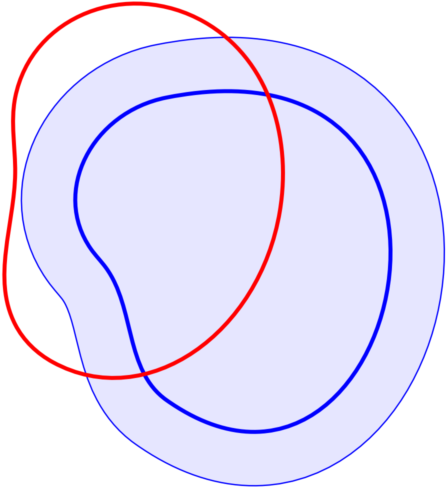
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



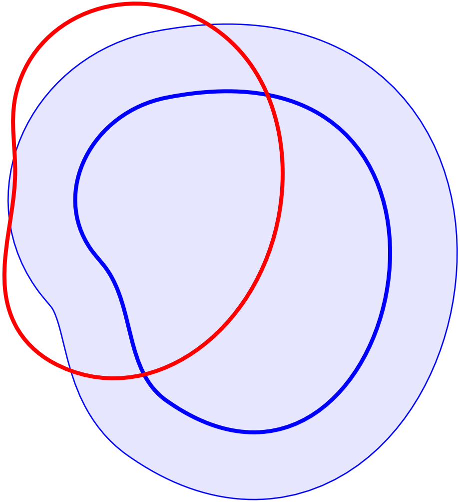
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



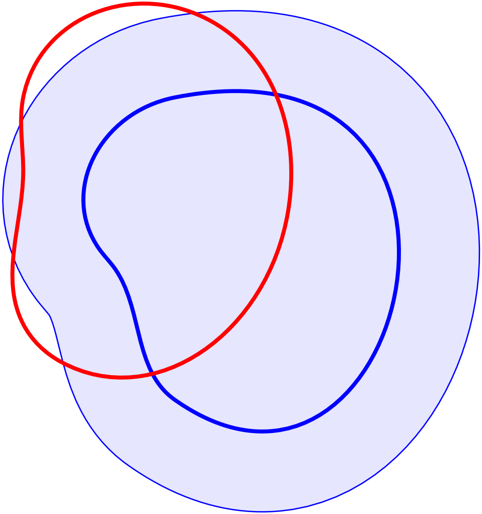
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



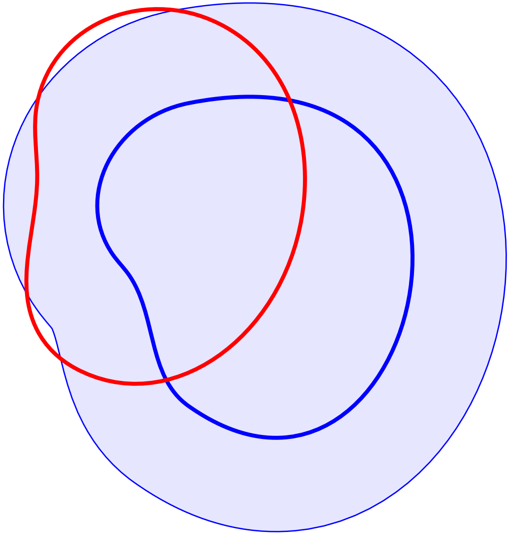
$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



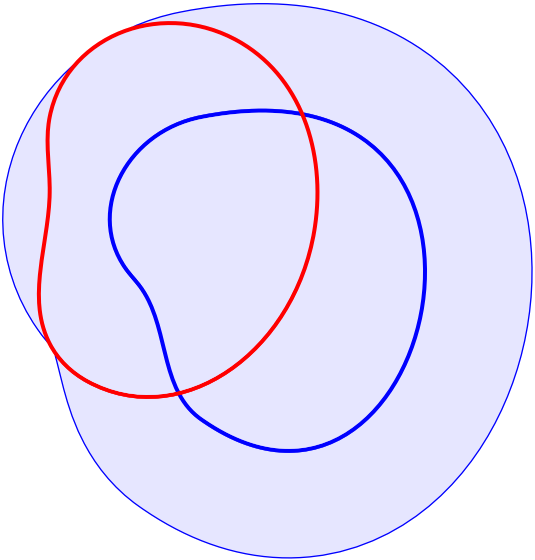
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



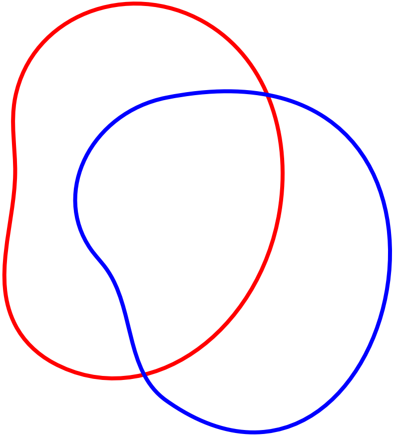
$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



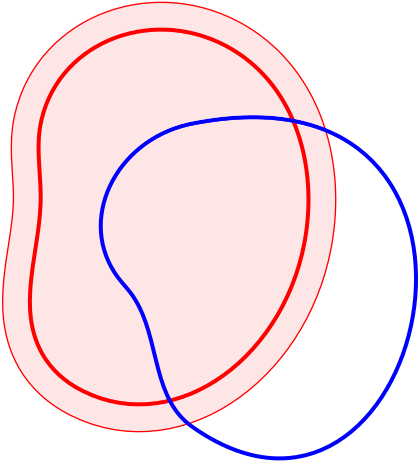
$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



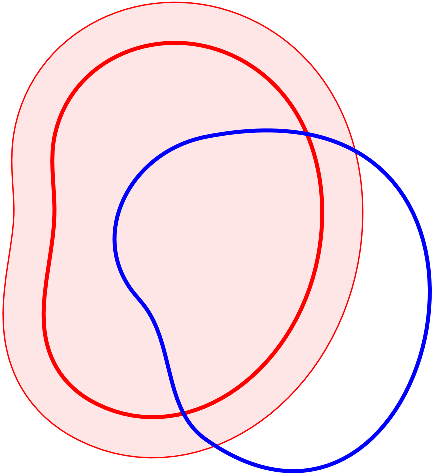
$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



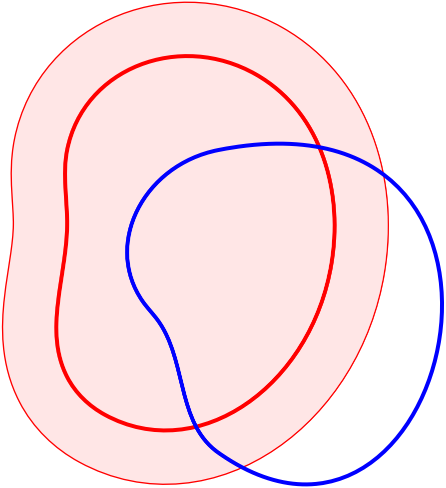
$$\mathrm{d}_H(K,L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L,\varepsilon) \wedge L \subset V(K,\varepsilon)\}$$



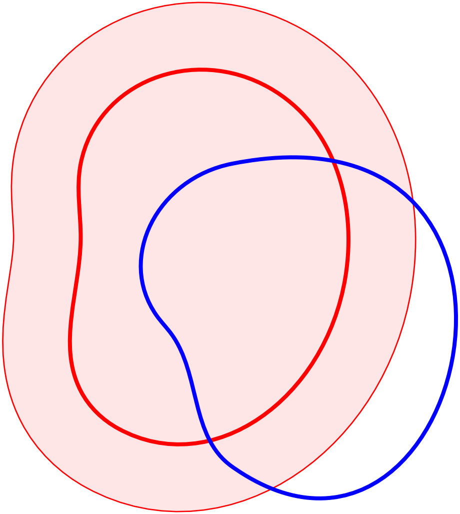
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



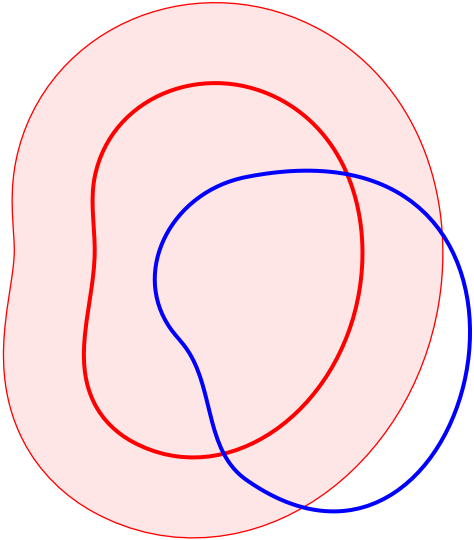
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



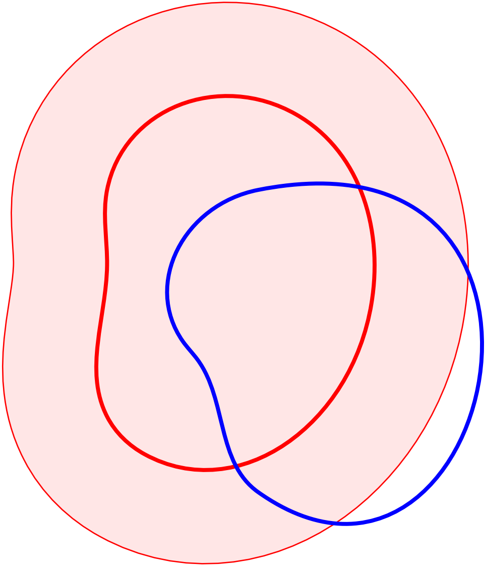
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



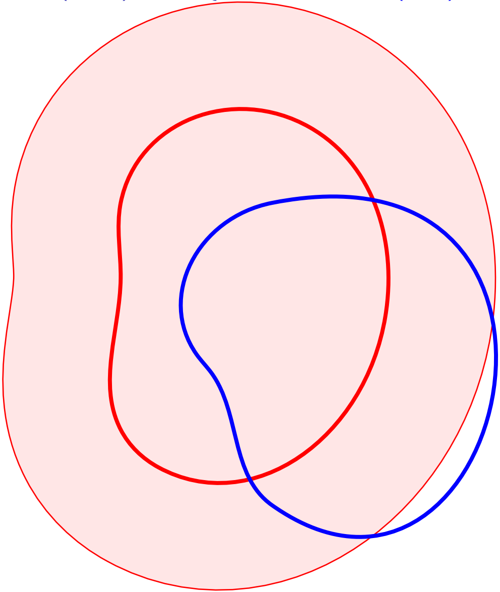
$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0\colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



$$\mathrm{d}_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset V(L, \varepsilon) \wedge L \subset V(K, \varepsilon)\}$$



Objetivo

Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $1 \leqslant k \leqslant n$.

$$\varepsilon_0(A) := \min_{\substack{Z\in\mathbb{C}^{n\times n} \\ \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z)\neq\varnothing}} \|Z - A\|$$

$$\varepsilon_0(A) = \min_{z\in\mathbb{C}} \sigma_{n-k+1}(zI_n - A)$$

Queremos demostrar que la función

$$g : [\varepsilon_0(A), \infty) \to H(\mathbb{C})$$

dada por $\varepsilon \mapsto \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A)$ es **continua**.

Queremos demostrar que la función

$$g : [\varepsilon_0(A), \infty) \to H(\mathbb{C})$$

dada por $\varepsilon \mapsto \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A)$ es **continua**.

Definición 2

Sean X, Y conjuntos. Una **correspondencia** $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es una regla que asigna a cada $x \in X$ un subconjunto $\Phi(x)$ de Y.

Grafo

$$\boxed{\mathrm{Gr}(\Phi) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}.}$$

Teorema 3 (Theorem 2.8 de [10]; Theorem 17.15 de [1])

Sean X un esp. topol. e Y un esp. métrico. Sea $\Phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia compacto-no-vacío valorada. Entonces la función

$$f : X \to H(Y) \quad \textit{definida por} \quad f(x) := \Phi(x)$$

es continua en $a \in X$ si y sólo si la correspondencia Φ es continua en a.

Definición 4

Sean $\Phi, \Psi : X \rightrightarrows Y$ correspondencias entre X e Y. Si $\Psi(x) \subset \Phi(x)$, $\forall x \in X$, decimos que Ψ es una **subcorrespondencia** de Φ.

Como

$$\boxed{\Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A), \quad \forall \varepsilon \geqslant 0,}$$

dadas

$$\begin{aligned} \Psi \colon [\varepsilon_0(A), \infty) &\rightrightarrows \mathbb{C} \\ \varepsilon &\longmapsto \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi \colon [\varepsilon_0(A), \infty) &\rightrightarrows \mathbb{C} \\ \varepsilon &\longmapsto \Lambda_\varepsilon(A) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\boxed{\Psi(\varepsilon) \subset \Phi(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \geqslant \varepsilon_0(A).}$$

Teorema 5 (Theorem 2.7 de [10]; Corollary 17.18 de [1])

Sean X un esp. topol. que satisface el primer axioma de numerabilidad e Y un esp. métrico. Sean $\Phi, \Psi \colon X \rightrightarrows Y$ correspondencias no-vacío valoradas entre X e Y t.q. Φ es compacto valorada y Ψ es una subcorrespondencia de Φ con $\mathrm{Gr}(\Psi)$ cerrado en $X \times Y$. Si Φ es semicontinua superiormente en $a \in X$, entonces Ψ es semicontinua superiormente en a.

Esquema de la demostración

Funciones		**Correspondencias**
$[\varepsilon_0(A), \infty) \to H(\mathbb{C})$		$[\varepsilon_0(A), \infty) \rightrightarrows \mathbb{C}$
f continua	$\Longleftrightarrow$	Φ continua, Gr(Ψ) cerrado
		$\Downarrow$
g continua	$\Longleftarrow$	$\begin{cases} \Psi \quad \text{semicont. sup.} \\ \text{Si probamos que} \quad \Psi \quad \text{semicont. inf.} \\ \text{tendremos que} \end{cases}$

$$g(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon) = \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A) = \Phi(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

Definición 6
Una correspondencia $\Phi\colon X \rightrightarrows Y$ entre esps. topols. es:

(1) **semicontinua superiormente** (SCS) en $a \in X$ si para cada abierto V t.q. $\Phi(a) \subset V$, existe un entorno U de a t.q. $x \in U$ implica que $\Phi(x) \subset V$;

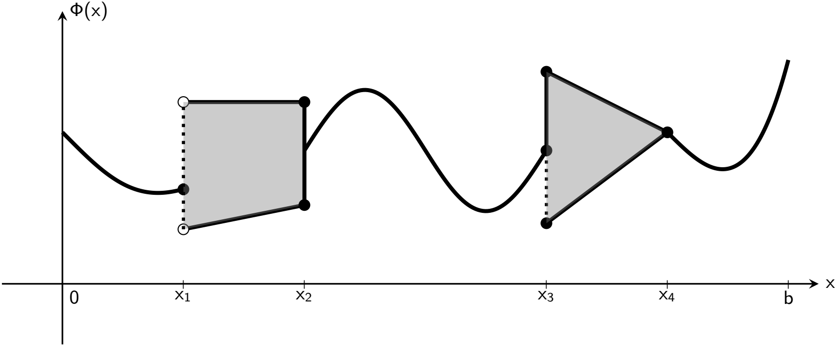
(2) **semicont. sup.** en $a \in X$ si $\forall V$ abierto $\Phi(a) \subset V$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$,$\forall x \in U$, $\Phi(x) \subset V$;

(3) **no es semicont. sup.** en a si $\exists V$ abierto $\Phi(a) \subset V$, $\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x_0 \in U$, $\Phi(x_0) \not\subset V$;

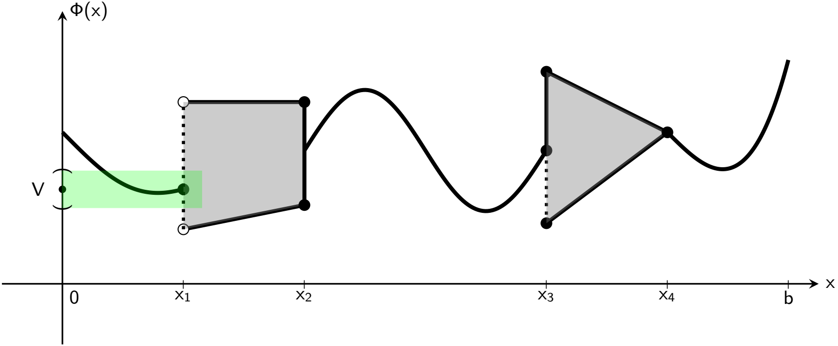
(4) **semicontinua inferiormente** (SCI) en $a \in X$ si para todo abierto V t. q. $V \cap \Phi(a) \neq \emptyset$, existe un entorno U de a t.q. $x \in U$ implica que $V \cap \Phi(x) \neq \emptyset$;

(5) **continua** en $a \in X$ si es semicontinua superior e inferiormente en a.

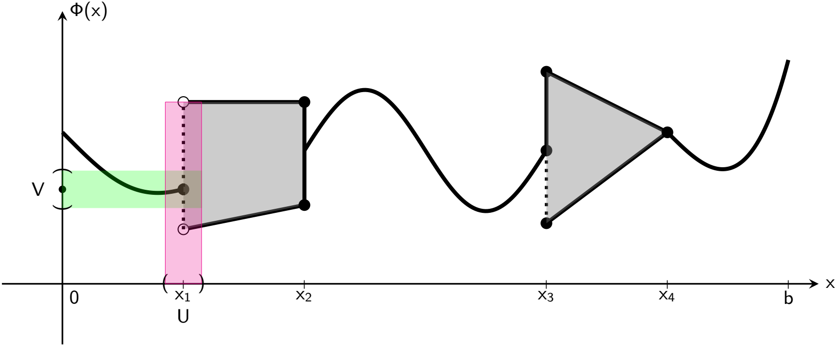
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



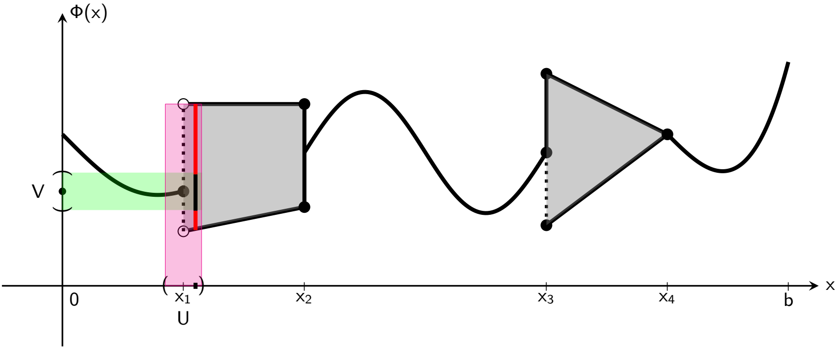
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



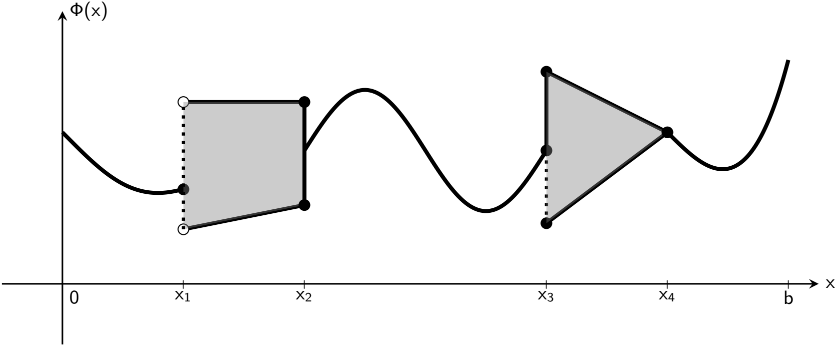
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



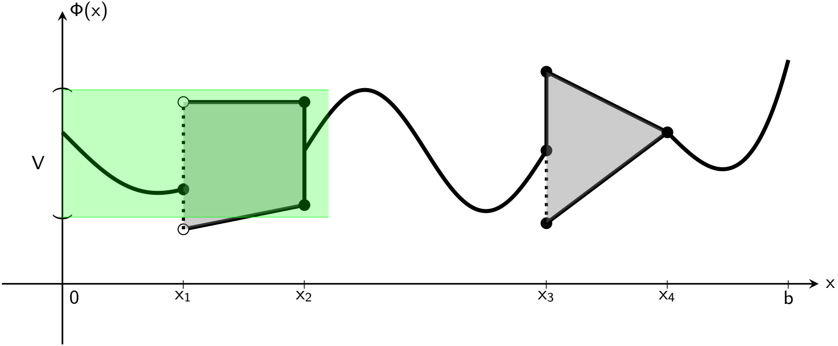
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



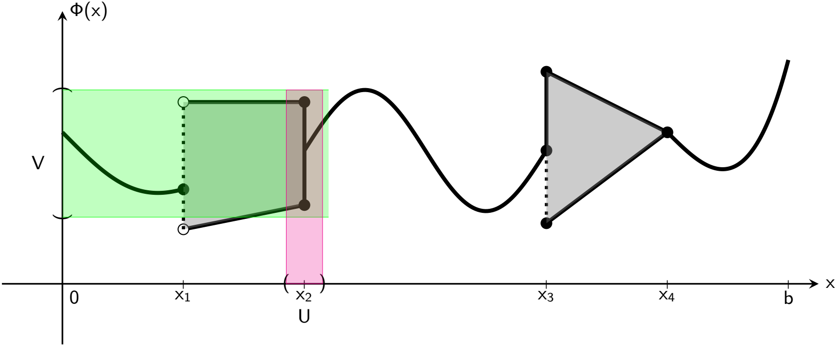
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



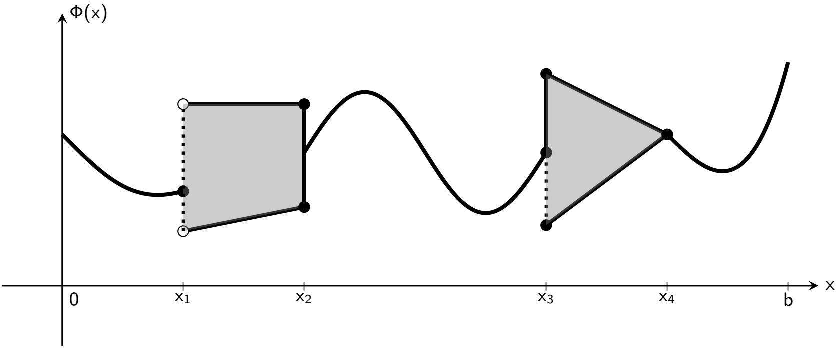
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



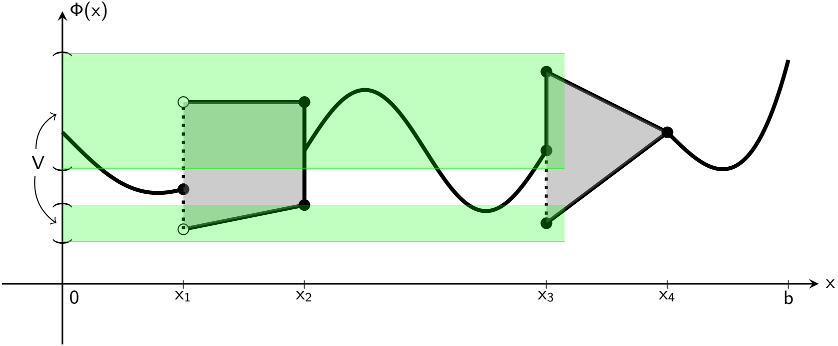
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



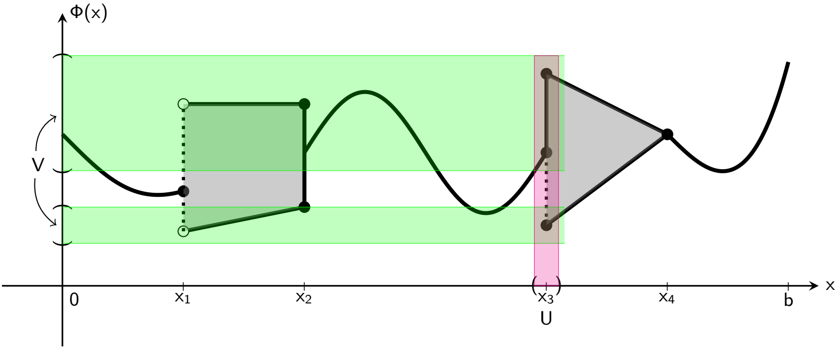
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



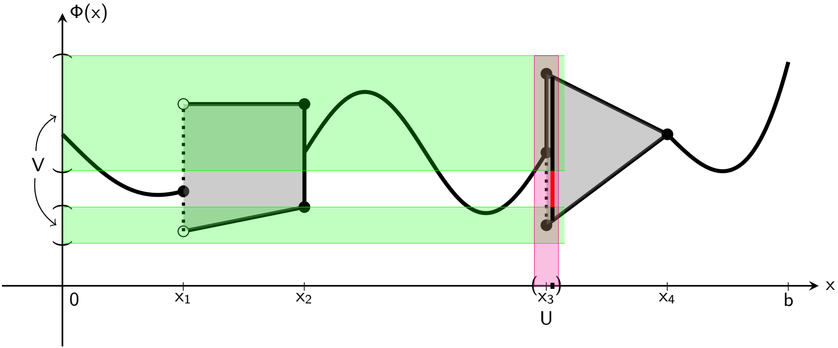
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



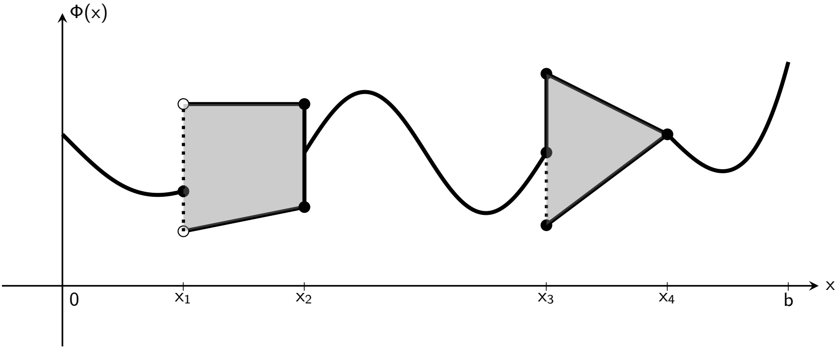
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



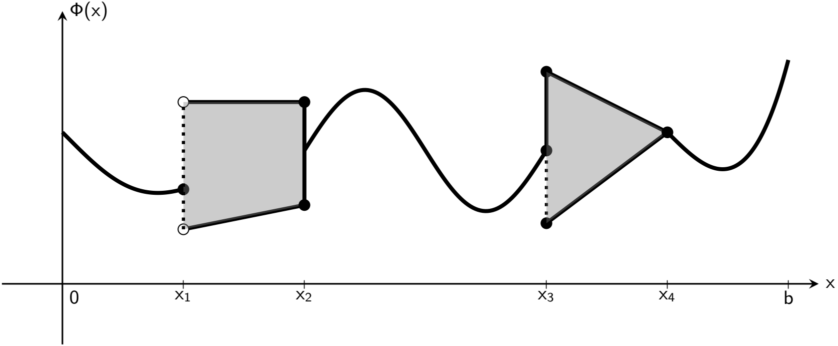
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



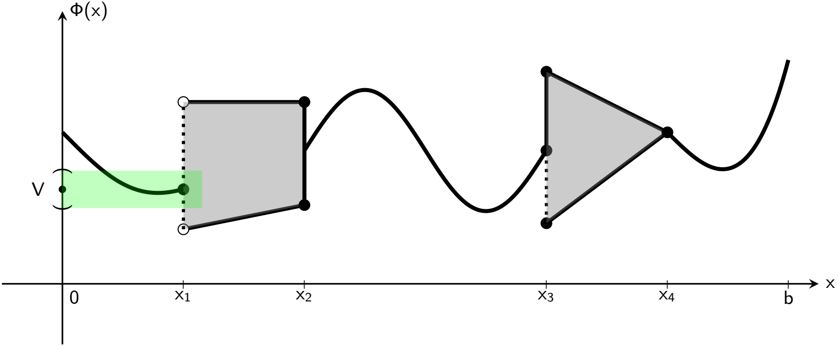
Semicontinuidad superior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



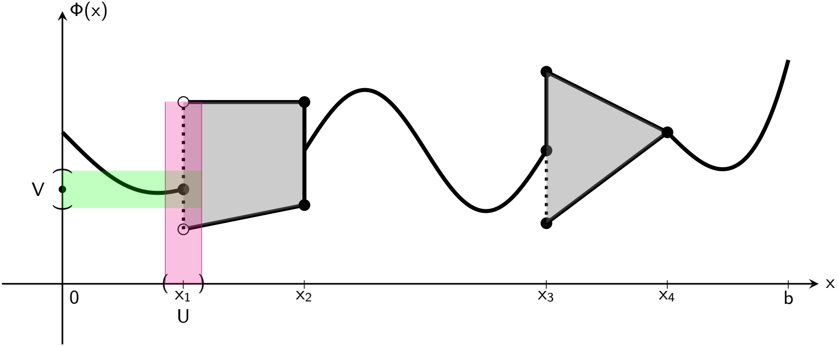
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



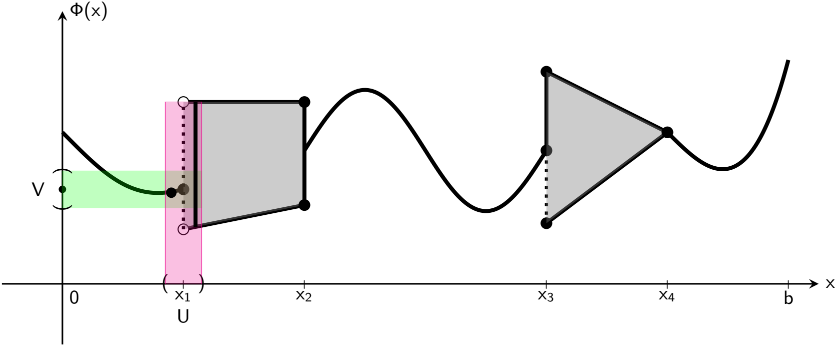
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



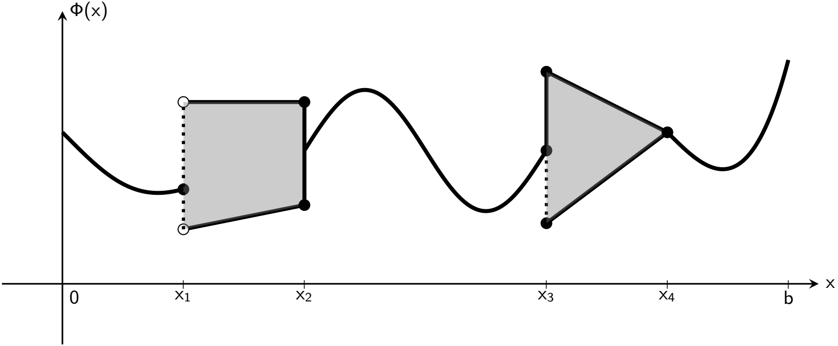
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



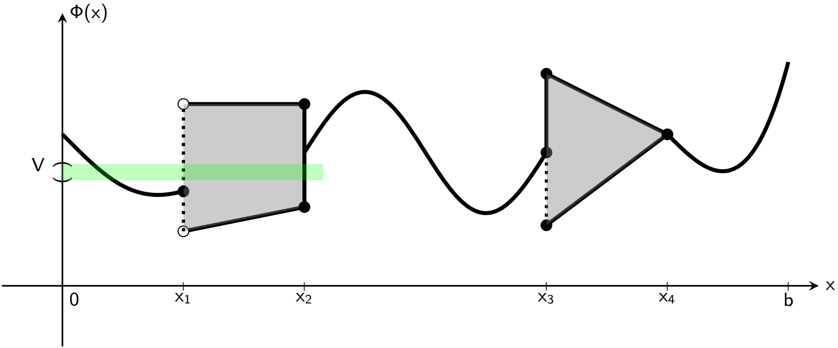
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



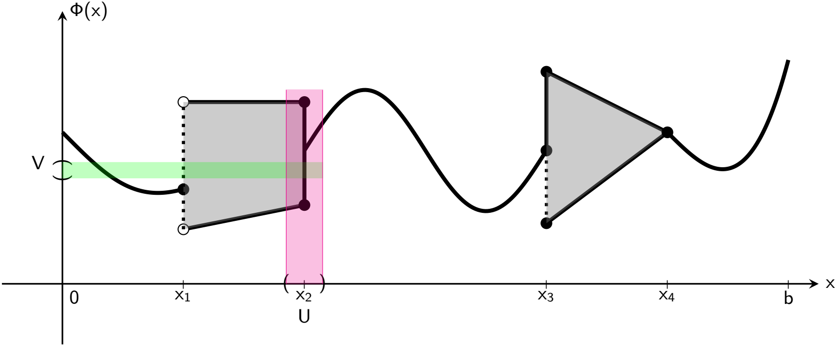
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



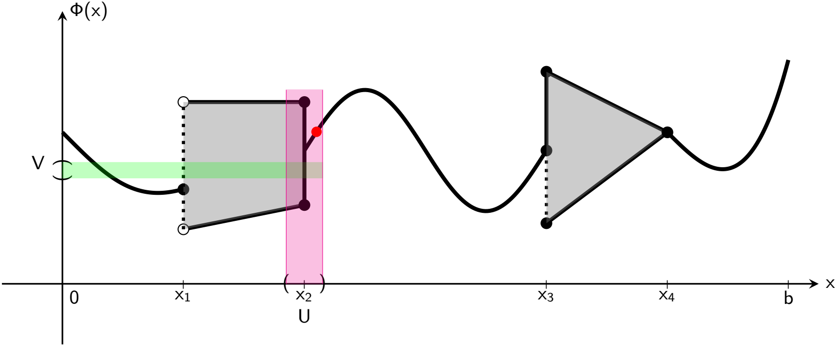
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



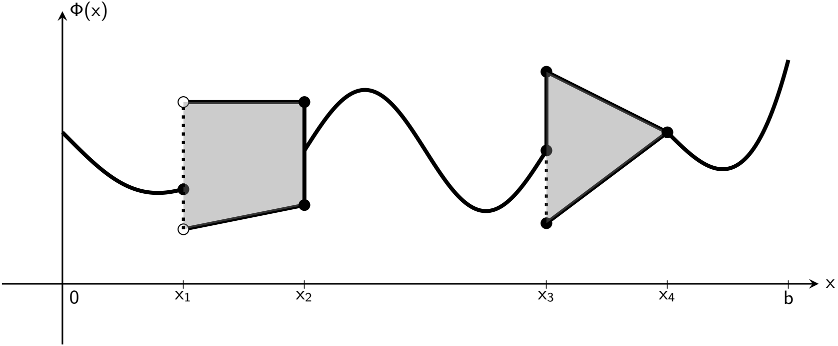
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



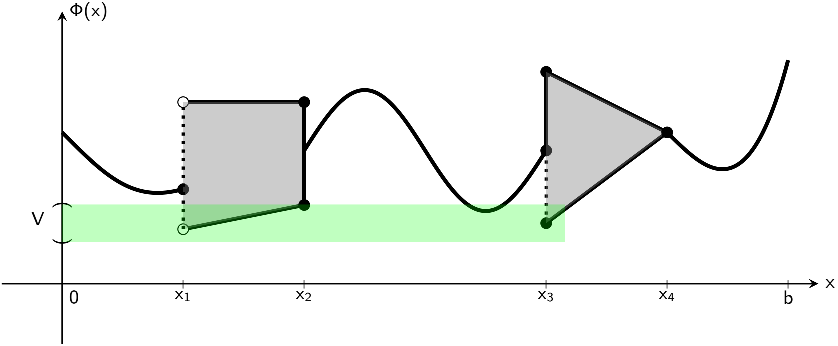
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



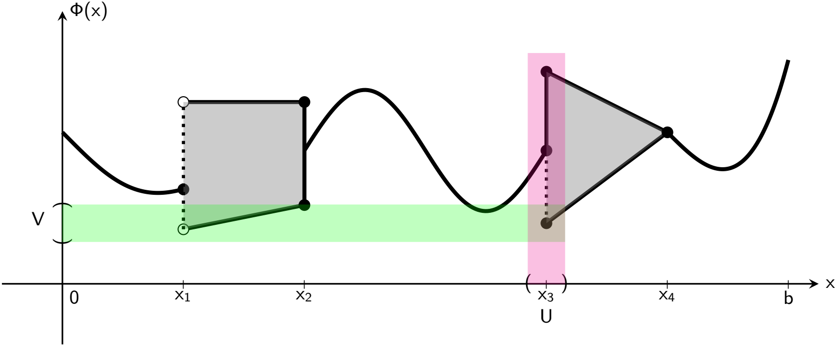
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



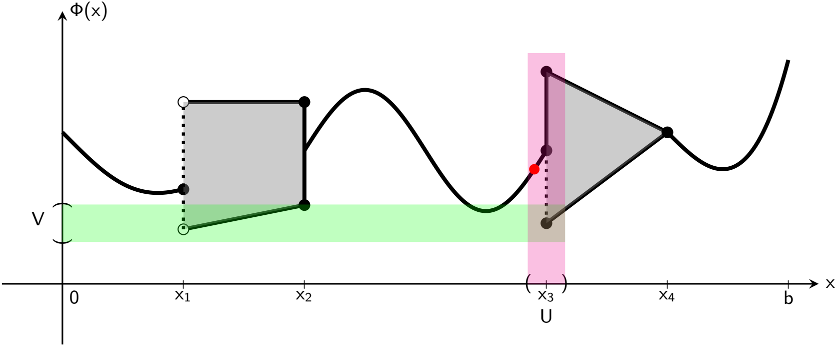
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



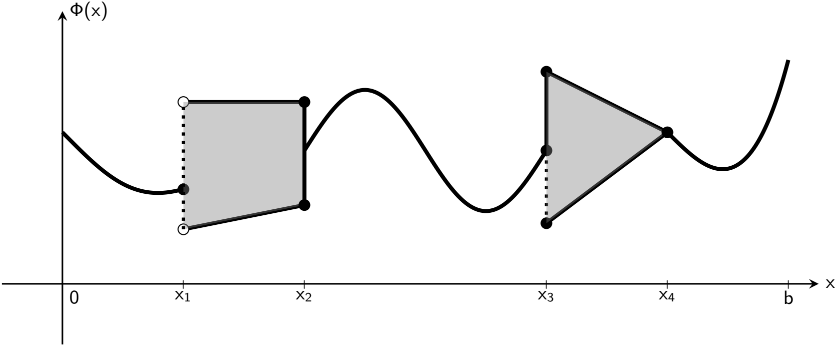
Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0, b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



Semicontinuidad inferior de una correspondencia $\Phi\colon (0,b) \rightrightarrows \mathbb{R}$



El grafo de $\Psi\colon [\varepsilon_0(A), \infty) \rightrightarrows \mathbb{C}$ es cerrado

$$\mathrm{Gr}(\Psi) := \{(\varepsilon, z) \in [\varepsilon_0(A), \infty) \times \mathbb{C} \colon z \in \Psi(\varepsilon)\}$$

Probaremos que $\mathrm{Gr}(\Psi)^c$ es abierto.

Sea $(\varepsilon_1, z_1) \in \mathrm{Gr}(\Psi)^c$. Esto equivale a que

$$\sigma_{n-k+1}(z_1 I_n - A) > \varepsilon_1 \iff \sigma_{n-k+1}(z_1 I_n - A) - \varepsilon_1 > 0.$$

Como la función $f\colon [\varepsilon_0(A), \infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(\varepsilon, z) := \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) - \varepsilon,$$

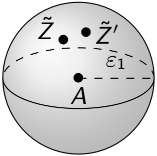
es continua, se sigue que existe un entorno U de (ε_1, z_1) t.q. $\forall(\varepsilon, z) \in U$ se tiene que

$$f(\varepsilon, z) > 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Gr}(\Psi)^c$ es abierto. $\square$

Semicontinuidad inferior de $\Psi\colon [\varepsilon_0(A), \infty) \rightrightarrows \mathbb{C}$

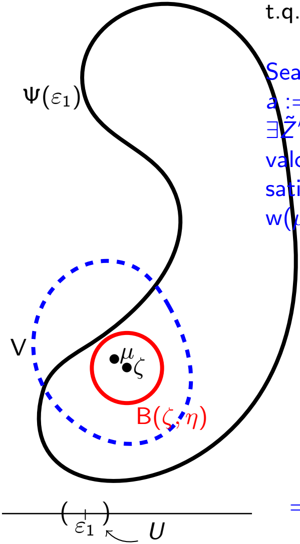
Sea $\varepsilon_1 \in [\varepsilon_0(A), \infty)$. Sea $V \subset \mathbb{C}$ abierto t.q. $V \cap \Psi(\varepsilon_1) \neq \emptyset$. ¿$\exists$ entorno U de ε_1 t.q. $\forall \varepsilon \in U$, $V \cap \Psi(\varepsilon) \neq \emptyset$?



$V \cap \Psi(\varepsilon_1) \neq \emptyset$
$\Longrightarrow$
$V \cap \Psi'(\varepsilon_1) \neq \emptyset$.

Sea $\zeta \in V \cap \Psi'(\varepsilon_1)$,
$\Longrightarrow \exists \tilde{Z} \in B(A, \varepsilon_1)$ t.q. $\mathrm{mg}(\zeta, \tilde{Z}) \geqslant k$.

$\varepsilon_1 < \varepsilon \implies$
$\Psi(\varepsilon_1) \subset \Psi(\varepsilon)$.
$\implies V \cap \Psi(\varepsilon) \neq \emptyset$



Tomemos un $\eta > 0$ *adecuado* a $\tilde{Z}$ t.q. $B(\zeta, \eta) \subset V \cap \Psi'(\varepsilon_1)$.

Sea $0 < \delta_1 < \varepsilon_1 - \|\tilde{Z} - A\|$. Sea $a := \mathrm{w}(\zeta, \tilde{Z})$; como $a \prec \mathrm{w}(\zeta, \tilde{Z})$, $\exists \tilde{Z}' \in B(\tilde{Z}, \delta_1)$ que tiene un solo valor propio μ en $B(\zeta, \eta)$ que satisface $\mathrm{w}(\mu, \tilde{Z}') = a$; $\Longrightarrow \mathrm{mg}(\mu, \tilde{Z}') \geqslant k$.

$$\begin{aligned}\|\tilde{Z}' - A\| &\leqslant \|\tilde{Z}' - \tilde{Z}\| + \|\tilde{Z} - A\| \\ &< \delta_1 + \|\tilde{Z} - A\| < \varepsilon_1.\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu \in \Psi\big(\delta_1 + \|\tilde{Z} - A\|\big)$$

$$\Longrightarrow V \cap \Psi\big(\delta_1 + \|\tilde{Z} - A\|\big) \neq \emptyset.$$

$\square$

Teorema 7

Supongamos que el esp. topol. satisface el primer axioma de numerabilidad y que Y es un esp. métr.. Sean $\Phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia no-vacío valorada y $a \in X$. Entonces las aserciones (1) y (2) que siguen son equivalentes.

(1) *La correspondencia Φ es semicont. sup. en a y $\Phi(a)$ es compacto.*

(2) *Si una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ en el grafo de Φ satisface $x_n \to a$, entonces la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene un valor de adherencia que está en $\Phi(a)$.*

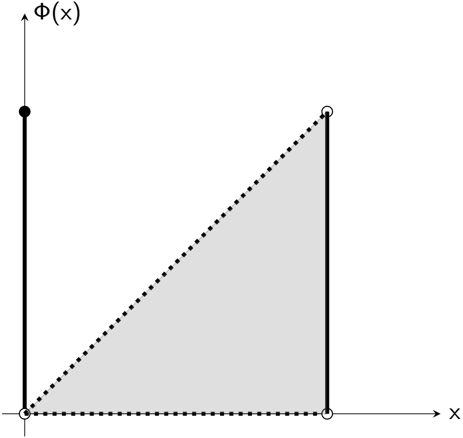
Teorema 8

Para una correspondencia $\Phi : X \rightrightarrows Y$ entre esps. topols. que satisfacen el primer axioma de numerabilidad las aserciones siguientes son equivalentes.

(1) *La correspondencia Φ es semicont. inf. en un punto a.*

(2) *Si $x_n \to a$, entonces para cada $b \in \Phi(a)$ existen una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y elementos $y_k \in \Phi(x_{n_k})$ para cada k tales que $y_k \to b$.*

Correspondencia SCS en 0, que no cumple la condición (a)



$$\Phi(x) := \begin{cases} (0,1] & \text{si } x = 0, \\ (0,x) & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Topología de Vietoris

Sean X, Y espacios topológicos. Denotemos $P_0(Y)$ al conjunto de las partes **no vacías** de Y.

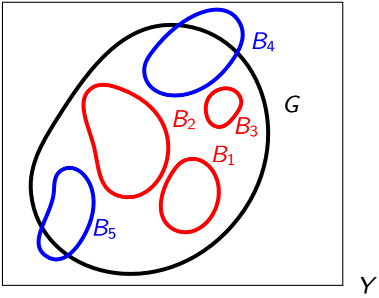
Duda

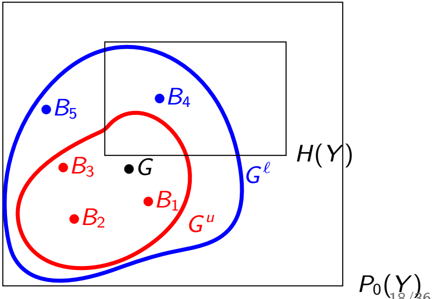
¿Es cierto que una correspondencia $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es continua en $a \in X$ si y sólo si la función $f : X \to P_0(Y)$, dada por $f(x) := \Phi(x), \forall x \in X$, es continua en $a \in X$ dotando a $P_0(Y)$ de la **topología de Vietoris**? **Respuesta: Sí.**

Sea Y un esp. topol.. Para cada abierto G de Y, definamos

$G^u := \{B \in P_0(Y) \colon B \subset G\}, \quad G^\ell := \{B \in P_0(Y) \colon G \cap B \neq \emptyset\}, \ \emptyset^u = \emptyset^\ell = \emptyset,$

pues $\{B \in P_0(Y) \colon B \subset \emptyset\}$ y $\{B \in P_0(Y) \colon \emptyset \cap B \neq \emptyset\}$ son vacíos.





Una **base** $\mathcal{A}$ de la **topología de Vietoris** de $P_0(Y)$ está dada por los conjuntos de la forma

$$G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell$$

donde $G_0, G_1, \ldots, G_n$ son subconjuntos abiertos de Y, $n \geqslant 1$.

Proposición 9

Si F, G son abiertos de Y, entonces $(F \cap G)^u = F^u \cap G^u$.

Demo. Sea $B \in P_0(Y)$.

$$B \in (F \cap G)^u \iff B \subset F \cap G \iff B \subset F_\wedge B \subset G \iff B \in F^u \cap G^u. \quad \square$$

Proposición 10

La intersección de dos elementos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Demo. Sean $G_0, G_1, \ldots, G_n$, $G_0', G_1', \ldots, G_m'$, $n, m \geqslant 1$, abiertos de Y. Se tiene que

$$\begin{aligned}(G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell) &\cap (G_0'^u \cap G_1'^\ell \cap \cdots \cap G_m'^\ell) \\ &= (G_0 \cap G_0')^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell \cap G_1'^\ell \cap \cdots \cap G_m'^\ell. \quad \square\end{aligned}$$

Como, además, $Y^u = Y^\ell = P_0(Y)$ y $\varnothing^u = \varnothing^\ell = \varnothing$, por el Corolario 21, se sigue que $\mathcal{A}$ es base de una topología de $P_0(Y)$. En resumen, $\{G^u, G^\ell : G \text{ abierto de } Y\}$ es una **subbase**.

Otra definición, más simple

La topología de Vietoris τ_V de $P_0(Y)$, donde (Y, τ) es un esp. topol., está engendrada por la **base** siguiente: para toda n-tupla $(G_1, \ldots, G_n)$, $n \geqslant 1$, de abiertos de Y, construimos el conjunto básico

$$\langle G_1, \ldots, G_n \rangle := \{C \subset G_1 \cup \cdots \cup G_n \colon\, C \cap G_i \neq \emptyset,\ \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Entonces

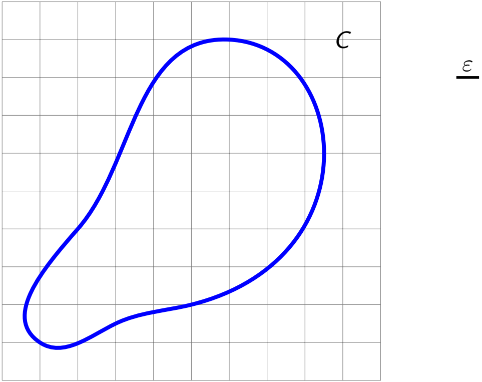
$$\mathcal{B} := \{\langle G_1, \ldots, G_n \rangle \colon\, G_1, \ldots, G_n \in \tau, n \geqslant 1\}.$$

En resumen,

$$\{G^{\ell} \colon\, G \text{ abierto de } Y\}$$

es una **subbase** de la topología de Vietoris τ_V de $P_0(Y)$.

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

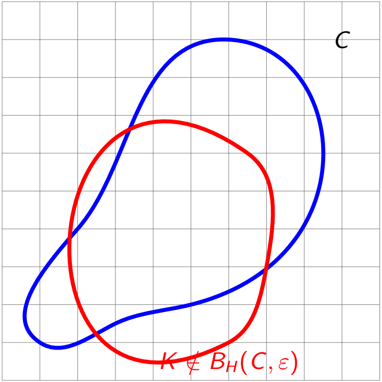


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \ \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \smallsetminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

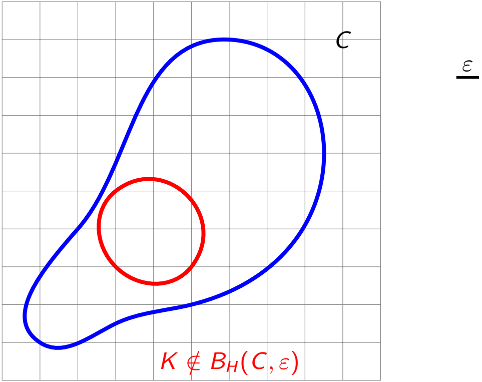


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \setminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

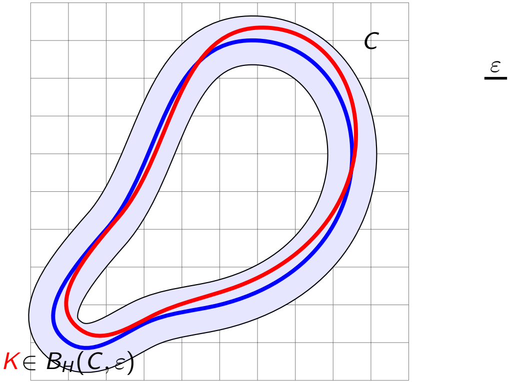


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \, \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \setminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

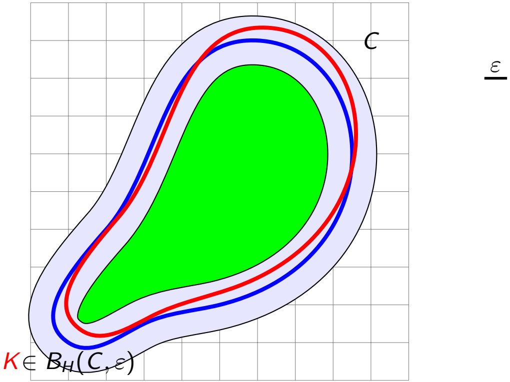


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \, \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \setminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

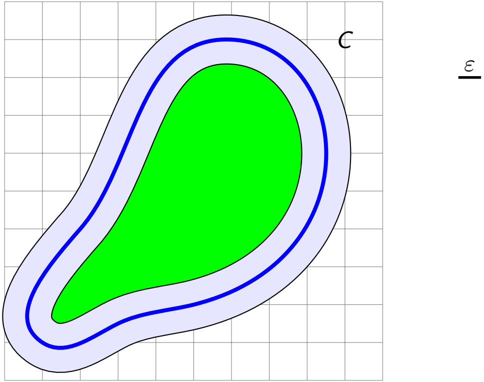


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \setminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?

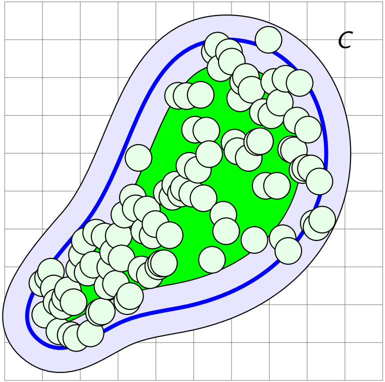


Sea $C \in H(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{B_H(C,\varepsilon) := \{K \in H(\mathbb{R}^2) \colon \mathrm{d}_H(K,C) < \varepsilon\}}$$

$$V(C,\varepsilon) \setminus V(\partial C,\varepsilon) \subset K \subset V(C,\varepsilon) \Longrightarrow K \in B_H(C,\varepsilon)$$

¿Cómo puede ser una bola abierta en $H(\mathbb{R}^2)$?



ε

Existen K finitos en la bola $B_H(C, \varepsilon)$. Como

$$C \subset \bigcup_{x \in C} B(x, \varepsilon/2); \implies \exists x_1, \ldots, x_n \in C \text{ t.q. } C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Sea $K := \{x_1, \ldots, x_n\}$; $\implies C \subset V(K, \varepsilon/2) \wedge K \subset C \subset V(C, \varepsilon/2)$. $\implies$

$$\mathrm{d}_H(K, C) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon; \implies K \in B_H(C, \varepsilon).$$

Teorema 11 (Theorem 3.91, pág. 120 de [1])

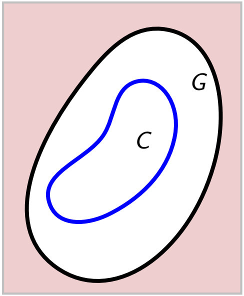
La topología $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$ de $H(Y)$, como subespacio topológico de $\left(P_0(Y), \tau_V\right)$, es igual a la topología τ_H del espacio métrico $\left(H(Y), \mathrm{d}_H\right)$.

Demo. Empezaremos probando que para cada abierto G de Y, los conjuntos $H(Y) \cap G^u$ y $H(Y) \cap G^\ell$ son abiertos en la topología τ_H. Ya que $\emptyset^u = \emptyset^\ell = \emptyset$ e $Y^u = Y^\ell = P_0(Y)$, podemos suponer que $\emptyset \neq G \subsetneq Y$.

Sea $C \in H(Y) \cap G^u$. Esto es, C es compacto no vacío y $C \subset G$. Para cada $x \in C$,

$$\mathrm{d}(x, G^c) := \inf_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y) = \min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y),$$

pues G^c es cerrado.



Sea $\varepsilon := \min_{x \in C} \mathrm{d}(x, G^c)$. Si $\varepsilon = 0$, $\exists x_0 \in C$ t.q. $\mathrm{d}(x_0, G^c) = 0$; $\implies \exists y_0 \in G^c$ t.q. $\min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x_0, y) = \mathrm{d}(x_0, y_0)$; $\implies x_0 = y_0$; como $C \cap G^c = \emptyset$, esto es imposible. Luego $\varepsilon > 0$. Sea

$$B_H(C, \varepsilon) := \{K \in H(Y) \colon \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon\}, \text{ bola abierta.}$$

Si $K \in B_H(C, \varepsilon)$, $\implies K \in H(Y)_\wedge \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$; $\implies K \subset V(C, \varepsilon) \subset G \implies K \in H(Y) \cap G^u$; $\implies H(Y) \cap G^u$ es τ_H–entorno de todos sus puntos. Por lo tanto, $H(Y) \cap G^u$ es τ_H–abierto en $H(Y)$.

Teorema 11 (Theorem 3.91, pág. 120 de [1])

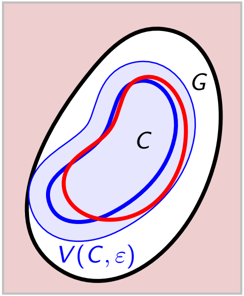
La topología $(\tau_V)_{H(Y)}$ de $H(Y)$, como subespacio topológico de $(P_0(Y), \tau_V)$, es igual a la topología τ_H del espacio métrico $(H(Y), \mathrm{d}_H)$.

Demo. Empezaremos probando que para cada abierto G de Y, los conjuntos $H(Y) \cap G^u$ y $H(Y) \cap G^\ell$ son abiertos en la topología τ_H. Ya que $\emptyset^u = \emptyset^\ell = \emptyset$ e $Y^u = Y^\ell = P_0(Y)$, podemos suponer que $\emptyset \neq G \subsetneq Y$.

Sea $C \in H(Y) \cap G^u$. Esto es, C es compacto no vacío y $C \subset G$. Para cada $x \in C$,

$$\mathrm{d}(x, G^c) := \inf_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y) = \min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y),$$

pues G^c es cerrado.



Sea $\varepsilon := \min_{x \in C} \mathrm{d}(x, G^c)$. Si $\varepsilon = 0$, $\exists x_0 \in C$ t.q. $\mathrm{d}(x_0, G^c) = 0$; $\implies \exists y_0 \in G^c$ t.q. $\min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x_0, y) = \mathrm{d}(x_0, y_0)$; $\implies x_0 = y_0$; como $C \cap G^c = \emptyset$, esto es imposible. Luego $\varepsilon > 0$. Sea

$B_H(C, \varepsilon) := \{K \in H(Y) \colon \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon\}$, bola abierta.

Si $K \in B_H(C, \varepsilon)$, $\implies K \in H(Y) \wedge \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$; $\implies K \subset V(C, \varepsilon) \subset G \implies K \in H(Y) \cap G^u$; $\implies H(Y) \cap G^u$ es τ_H–entorno de todos sus puntos. Por lo tanto, $H(Y) \cap G^u$ es τ_H–abierto en $H(Y)$.

Teorema 11 (Theorem 3.91, pág. 120 de [1])

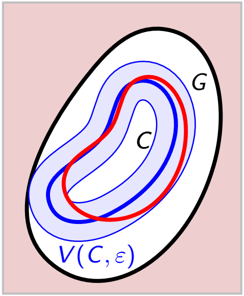
La topología $(\tau_V)_{H(Y)}$ de $H(Y)$, como subespacio topológico de $(P_0(Y), \tau_V)$, es igual a la topología τ_H del espacio métrico $(H(Y), \mathrm{d}_H)$.

Demo. Empezaremos probando que para cada abierto G de Y, los conjuntos $H(Y) \cap G^u$ y $H(Y) \cap G^\ell$ son abiertos en la topología τ_H. Ya que $\emptyset^u = \emptyset^\ell = \emptyset$ e $Y^u = Y^\ell = P_0(Y)$, podemos suponer que $\emptyset \neq G \subsetneq Y$.

Sea $C \in H(Y) \cap G^u$. Esto es, C es compacto no vacío y $C \subset G$. Para cada $x \in C$,

$$\mathrm{d}(x, G^c) := \inf_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y) = \min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x, y),$$

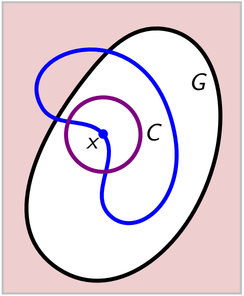
pues G^c es cerrado.



Sea $\varepsilon := \min_{x \in C} \mathrm{d}(x, G^c)$. Si $\varepsilon = 0$, $\exists x_0 \in C$ t.q. $\mathrm{d}(x_0, G^c) = 0$; $\implies \exists y_0 \in G^c$ t.q. $\min_{y \in G^c} \mathrm{d}(x_0, y) = \mathrm{d}(x_0, y_0)$; $\implies x_0 = y_0$; como $C \cap G^c = \emptyset$, esto es imposible. Luego $\varepsilon > 0$. Sea

$B_H(C, \varepsilon) := \{K \in H(Y) \colon \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon\}$, bola abierta.

Si $K \in B_H(C, \varepsilon)$, $\implies K \in H(Y)_\wedge \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$; $\implies K \subset V(C, \varepsilon) \subset G \implies K \in H(Y) \cap G^u$; $\implies H(Y) \cap G^u$ es τ_H–entorno de todos sus puntos. Por lo tanto, $H(Y) \cap G^u$ es τ_H–abierto en $H(Y)$.



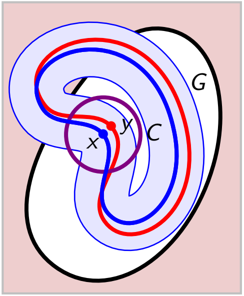
Sea $C \in H(Y) \cap G^{\ell}$. Esto es, C es compacto no vacío y $C \cap G \neq \emptyset$. Fijemos un $x \in C \cap G$. Entonces $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset G$. Afirmamos que

$$B_H(C, \varepsilon) \subset H(Y) \cap G^{\ell}.$$

Para ver esto, sea $K \in B_H(C, \varepsilon)$. Esto es, $K \in H(Y)_\wedge \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$.
Como $\mathrm{d}(x, K) \leqslant \mathrm{d}_H(K, C)$, $\Rightarrow$ $\exists y \in K$ t.q. $\mathrm{d}(x, y) < \varepsilon$; $\Rightarrow$ $y \in G$; $\Rightarrow$ $G \cap K \neq \emptyset$; $\Rightarrow$ $K \in G^{\ell}$. De donde,

$$B_H(C, \varepsilon) \subset H(Y) \cap G^{\ell}.$$

Por tanto, $H(Y) \cap G^{\ell}$ es τ_H–abierto en $H(Y)$.



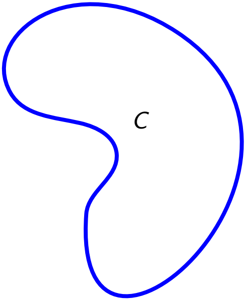
Sea $C \in H(Y) \cap G^{\ell}$. Esto es, C es compacto no vacío y $C \cap G \neq \emptyset$. Fijemos un $x \in C \cap G$. Entonces $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset G$. Afirmamos que

$$B_H(C, \varepsilon) \subset H(Y) \cap G^{\ell}.$$

Para ver esto, sea $K \in B_H(C, \varepsilon)$. Esto es, $K \in H(Y)_{\wedge} \, \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$.
Como $\mathrm{d}(x, K) \leqslant \mathrm{d}_H(K, C)$, $\Rightarrow$ $\exists y \in K$ t.q. $\mathrm{d}(x, y) < \varepsilon$; $\Rightarrow$ $y \in G$; $\Rightarrow$ $G \cap K \neq \emptyset$; $\Rightarrow$ $K \in G^{\ell}$. De donde,

$$B_H(C, \varepsilon) \subset H(Y) \cap G^{\ell}.$$

Por tanto, $H(Y) \cap G^{\ell}$ es τ_H–abierto en $H(Y)$.



Ahora demostraremos que cualquier bola abierta de $(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y}), \mathrm{d}_{\boldsymbol{H}})$ es $\left(\boldsymbol{\tau_V}\right)_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y})}$–abierto.
Sean $C \in H(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Necesitamos demostrar que para cada $K \in B_H(C, \varepsilon)$ existe un τ_V–abierto $\mathcal{U}_K$ en $P_0(Y)$ t.q.

$$K \in H(Y) \cap \mathcal{U}_K \subset B_H(C, \varepsilon).$$

(El abierto $\mathcal{U}_K$ depende de K). Lo cual implicaría que $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–entorno de todos sus puntos; $\implies$ $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Empecemos. Como $\mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$, se tiene que

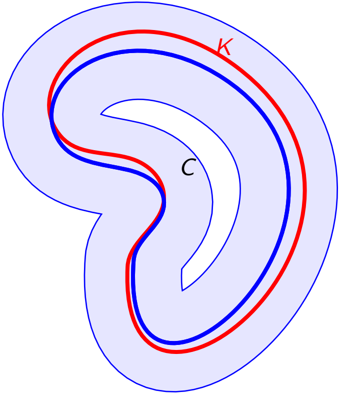
$$\varepsilon_K := \varepsilon - \mathrm{d}_H(K, C) > 0. \qquad (1)$$

Sea $G_0 := V(K, \varepsilon_K/2) = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$. Como

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2)$$

y K es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ t.q.

continuación, 2, ...



Ahora demostraremos que cualquier bola abierta de $(H(Y), \mathrm{d}_H)$ es $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Sean $C \in H(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Necesitamos demostrar que para cada $K \in B_H(C, \varepsilon)$ existe un τ_V–abierto $\mathfrak{U}_K$ en $P_0(Y)$ t.q.

$$K \in H(Y) \cap \mathfrak{U}_K \subset B_H(C, \varepsilon).$$

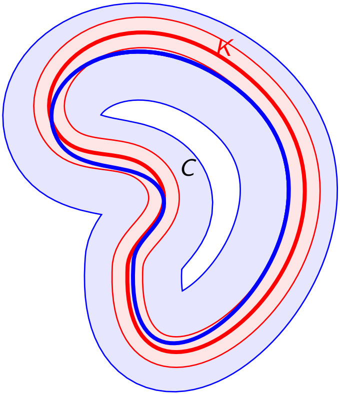
(El abierto $\mathfrak{U}_K$ depende de K). Lo cual implicaría que $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–entorno de todos sus puntos; $\Longrightarrow$ $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Empecemos. Como $\mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$, se tiene que

$$\varepsilon_K := \varepsilon - \mathrm{d}_H(K, C) > 0. \qquad (1)$$

Sea $G_0 := V(K, \varepsilon_K/2) = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$. Como

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2)$$

y K es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ t.q.



Ahora demostraremos que cualquier bola abierta de $(H(Y), \mathrm{d}_H)$ es $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Sean $C \in H(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Necesitamos demostrar que para cada $K \in B_H(C,\varepsilon)$ existe un τ_V–abierto $\mathcal{U}_K$ en $P_0(Y)$ t.q.

$$K \in H(Y) \cap \mathcal{U}_K \subset B_H(C,\varepsilon).$$

(El abierto $\mathcal{U}_K$ depende de K). Lo cual implicaría que $B_H(C,\varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–entorno de todos sus puntos; $\implies$ $B_H(C,\varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Empecemos. Como $\mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$, se tiene que

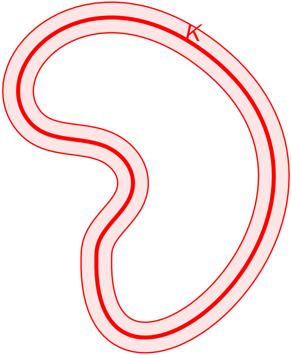
$$\varepsilon_K := \varepsilon - \mathrm{d}_H(K, C) > 0. \qquad (1)$$

Sea $G_0 := V(K, \varepsilon_K/2) = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$. Como

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2)$$

y K es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ t.q.

continuación, 2, ...



Ahora demostraremos que cualquier bola abierta de $(\boldsymbol{H(Y)}, \mathrm{d}_{\boldsymbol{H}})$ es $\left(\boldsymbol{\tau_V}\right)_{\boldsymbol{H(Y)}}$–abierto. Sean $C \in H(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Necesitamos demostrar que para cada $K \in B_H(C, \varepsilon)$ existe un τ_V–abierto $\mathfrak{U}_K$ en $P_0(Y)$ t.q.

$$K \in H(Y) \cap \mathfrak{U}_K \subset B_H(C, \varepsilon).$$

(El abierto $\mathfrak{U}_K$ depende de K). Lo cual implicaría que $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–entorno de todos sus puntos; $\implies$ $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.
Empecemos. Como $\mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$, se tiene que

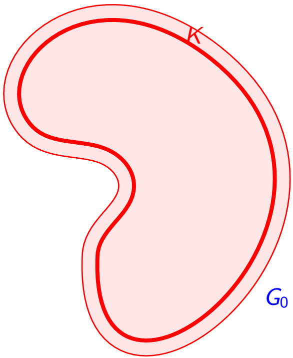
$$\varepsilon_K := \varepsilon - \mathrm{d}_H(K, C) > 0. \tag{1}$$

Sea $G_0 := V(K, \varepsilon_K/2) = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$. Como

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2)$$

y K es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ t.q.

continuación, 2, ...



Ahora demostraremos que cualquier bola abierta de $(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y}), \mathrm{d}_{\boldsymbol{H}})$ es $\left(\boldsymbol{\tau_V}\right)_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y})}$–abierto. Sean $C \in H(Y)$ y $\varepsilon > 0$. Necesitamos demostrar que para cada $K \in B_H(C, \varepsilon)$ existe un τ_V–abierto $\mathcal{U}_K$ en $P_0(Y)$ t.q.

$$K \in H(Y) \cap \mathcal{U}_K \subset B_H(C, \varepsilon).$$

(El abierto $\mathcal{U}_K$ depende de K). Lo cual implicaría que $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–entorno de todos sus puntos; $\Longrightarrow$ $B_H(C, \varepsilon)$ sería $\left(\tau_V\right)_{H(Y)}$–abierto.

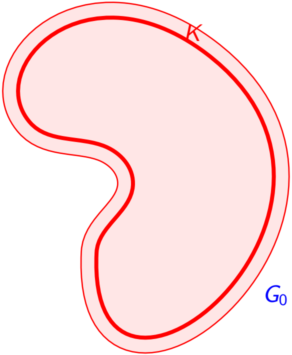
Empecemos. Como $\mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon$, se tiene que

$$\varepsilon_K := \varepsilon - \mathrm{d}_H(K, C) > 0. \qquad (1)$$

Sea $G_0 := V(K, \varepsilon_K/2) = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$. Como

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2)$$

y K es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ t.q.



$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_K/2) \wedge$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ K \not\subset \bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} B(x_i, \varepsilon_K/2).$$

Llamemos $G_i := B(x_i, \varepsilon_K/2)$ y tomemos

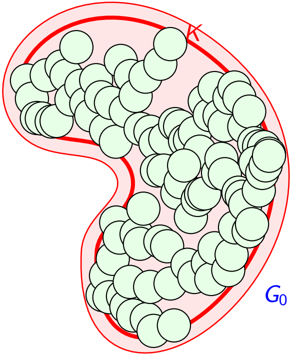
$$\mathfrak{U}_K := G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell.$$

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, \varepsilon_K/2) = V(K, \varepsilon_K/2) = G_0;$$

$$\Longrightarrow K \in G_0^u.$$

La elección de $x_1, \ldots, x_n$ prueba que $K \cap G_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. En consecuencia,

$$K \in G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell = \mathfrak{U}_K.$$



$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_K/2) \wedge$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ K \not\subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} B(x_i, \varepsilon_K/2).$$

Llamemos $G_i := B(x_i, \varepsilon_K/2)$ y tomemos

$$\mathfrak{U}_K := G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell.$$

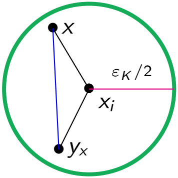
$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_K/2) = V(K, \varepsilon_K/2) = G_0;$$

$$\Longrightarrow K \in G_0^u.$$

La elección de $x_1, \dots, x_n$ prueba que $K \cap G_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. En consecuencia,

$$K \in G_0^u \cap G_1^\ell \cap \cdots \cap G_n^\ell = \mathfrak{U}_K.$$

continuación, 4, ...



Ahora, vamos a demostrar que

$$H(Y) \cap \mathcal{U}_K \subset B_H(C, \varepsilon).$$

Sea $L \in H(Y) \cap \mathcal{U}_K$; $\implies L \subset Y$ es compacto no vacío $\wedge$ $L \subset G_0 \wedge L \cap G_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Quiero demostrar que $\mathrm{d}_H(L, C) < \varepsilon$. Usaré la desigualdad

$$\mathrm{d}_H(L, C) \leqslant \mathrm{d}_H(L, K) + \mathrm{d}_H(K, C).$$

Dado que $G_0 = \{y \in Y : \mathrm{d}(y, K) < \varepsilon_K/2\}$, se sigue que

$$\max_{y \in L} \mathrm{d}(y, K) = \mathrm{d}(y_0, K) < \varepsilon_K/2, \quad \text{donde } y_0 \in L. \quad (2)$$

Cada $x \in K$ pertenece a algún $G_i = B(x_i, \varepsilon_K/2)$, que a su vez contiene puntos y_x de L. Es decir, $x, y_x \in G_i$; $\implies \mathrm{d}(x, y_x) \leqslant \mathrm{d}(x, x_i) + \mathrm{d}(x_i, y_x) < \varepsilon_K$; $\implies \mathrm{d}(x, L) \leqslant \mathrm{d}(x, y_x) < \varepsilon_K$; $\implies \mathrm{d}(x, L) < \varepsilon_K$; $\implies$

$$\max_{x \in K} \mathrm{d}(x, L) = \mathrm{d}(x_0, L) < \varepsilon_K, \quad \text{donde } x_0 \in K. \quad (3)$$

De (2) y (3), deducimos que

$$\mathrm{d}_H(L, K) := \max\left\{\max_{y\in L}\mathrm{d}(y, K), \max_{x\in K}\mathrm{d}(x, L)\right\} < \varepsilon_K.$$

De donde, por (1),

$$\mathrm{d}_H(L, C) \leqslant \mathrm{d}_H(L, K) + \mathrm{d}_H(K, C) < \varepsilon_K + \mathrm{d}_H(K, C) = \varepsilon.$$

$\square$

Así pues, hemos dado un paso importante en la demostración del Teorema 3.

$$\Phi : X \rightrightarrows (Y, \tau); \quad f : X \to (P_0(Y), \tau_V); \quad f(x) := \Phi(x)$$

Teorema 12

Supongamos que $\Phi : X \rightrightarrows (Y, \tau)$ es no-vacío valorada. Entonces Φ es continua si y sólo si $f : X \to (P_0(Y), \tau_V)$, dada por $f(x) := \Phi(x), \forall x \in X$, es continua.

Demo.- Supongamos que Φ es continua. Por el Teorema 26, como

$$\{G^u, G^\ell : G \in \tau\}$$

es una subbase de τ_V, si probamos que $f^{-1}(G^u)$ y $f^{-1}(G^\ell)$ son abiertos en X, habremos probado que f es continua.

Plan.- *Tomo un $x_0 \in f^{-1}(G^u)$ cualquiera. Demostraré que $f^{-1}(G^u)$ es un entorno de x_0. Lo que implicará que $f^{-1}(G^u)$ es entorno de todos sus puntos. Y así, que $f^{-1}(G^u)$ es abierto.*

Observemos que

$$f^{-1}(G^u) = \{x \in X \mid f(x) \in G^u\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \in G^u\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \subset G\}.$$

Como Φ es semicont. sup. en x_0 y $\Phi(x_0) \subset G$, existe un entorno U_{x_0} de x_0 t.q. $\forall x \in U_{x_0} \implies \Phi(x) \subset G$. De donde, $f(x) \in G^u$, $\implies$

$$U_{x_0} \subset f^{-1}(G^u); \implies f^{-1}(G^u) \text{ es entorno de } x_0; \implies$$

$f^{-1}(G^u)$ es abierto. (sigue)

Probemos ahora que si $G \in \tau$ y $x_0 \in f^{-1}(G^\ell)$, entonces $f^{-1}(G^\ell)$ es un entorno de x_0. Recordemos que

$$G^\ell = \{B \in P_0(Y) \,|\, B \cap G \neq \emptyset\}.$$

Como Φ es semicont. inf. en x_0 y $\Phi(x_0) \cap G \neq \emptyset$, $\exists U_{x_0}$ (entorno de x_0) t.q. $\forall x \in U_{x_0}$, $\Phi(x) \cap G \neq \emptyset$. En consecuencia, $f(x) = \Phi(x) \in G^\ell \iff x \in f^{-1}(G^\ell)$; $\implies U_{x_0} \subset f^{-1}(G^\ell)$; $\implies f^{-1}(G^\ell)$ es entorno de x_0; $\implies f^{-1}(G^\ell)$ es abierto.
Acabamos de probar que si $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es semicont. sup. e inf. en X, entonces $f : X \to P_0(Y)$ es continua en X.

Recíproco.- Supongamos que $f : X \to P_0(Y)$ es continua en $x_0 \in X$. Probaremos que $\Phi : X \rightrightarrows Y$ es semicont. sup. en inf. en x_0.

Sea $G \subset Y$ abierto t.q. $\Phi(x_0) \subset G$; $\implies f(x_0) \in G^u$. Dado que G^u es un abierto de $P_0(Y)$ y f es continua en x_0, se tiene que $f^{-1}(G^u)$ es un entorno de x_0. Además, $\forall x \in f^{-1}(G^u)$, $\Phi(x) = f(x) \in G^u \iff \Phi(x) \subset G$; $\implies \Phi$ es semicont. sup. en x_0.

(sigue)

continúa ...

Sea $G \subset Y$ abierto t.q.

$$\Phi(x_0) \cap G \neq \emptyset.$$

$\Longrightarrow f(x_0) \in G^\ell$. Como G^ℓ es un abierto de $P_0(Y)$ y f es continua en x_0 $\Longrightarrow f^{-1}(G^\ell)$ es un entorno de x_0.
Además, $\forall x \in f^{-1}(G^\ell)$, $f(x) \in G^\ell \iff f(x) \cap G \neq \emptyset \iff \Phi(x) \cap G \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \Phi$ es semicont. inf. en x_0.

$\square$

Finalizando Demo. Teorema 3

Sucesiones de subconjuntos

Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de un esp. métrico. Se llama $\liminf_{n\to\infty} K_n$ al *conjunto de límites de sucesiones* $y_n \in K_n$. Se llama $\limsup_{n\to\infty} K_n$ al *conjunto de valores de adherencia de sucesiones* $y_n \in K_n$.

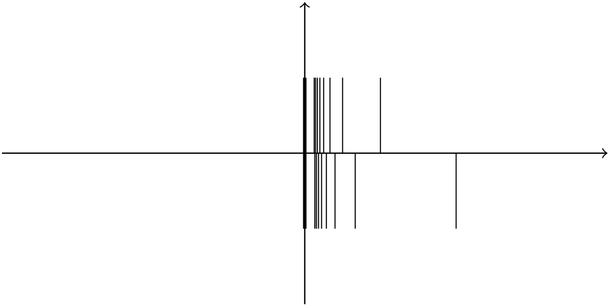
Observemos que

$$\liminf_{n\to\infty} K_n \subset \limsup_{n\to\infty} K_n.$$

Ejemplo [2, Pág. 18]. Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión de subconjuntos K_n de $\mathbb{R}^2$ definida por

$$K_n := \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1], & \text{si } n \text{ es par}, \\ \{\frac{1}{n}\} \times [-1,0], & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} K_n = \{(0,0)\}, \quad \limsup_{n\to\infty} K_n = \{0\} \times [-1,1].$$



Proposición 13 (Corollary 5.3.7. de [7])

Sea $\Phi : X \rightrightarrows Y$ *una correspondencia entre esps. topols.* X *e* Y *que satisfacen el primer axioma de numerabilidad. Sea* $a \in X$. *Si* Φ *es semicont. sup. en* a, *entonces para toda sucesión* $x_n \to a$ *tenemos*

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi(x_n) \subset \overline{\Phi(a)}.$$

Proposición 14 (Corollary 5.3.16. de [7])

Sea $\Phi : X \rightrightarrows Y$ *una correspondencia entre esps. topols.* X *e* Y *que satisfacen el primer axioma de numerabilidad. Sea* $a \in X$. *Si* Φ *es semicont. inf. en* a, *entonces para toda sucesión* $x_n \to a$ *tenemos*

$$\Phi(a) \subset \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n).$$

Comienzo de la demostración del Teorema 5

Teorema 7. Repetido, por comodidad. *X p.a.n., Y esp. métr., $\Phi : X \rightrightarrows Y$ no-vacío valorada, $a \in X$. Son equivalentes: (1) Φ es semicont. sup. en a y $\Phi(a)$ es compacto. (2) Si $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathrm{Gr}(\Phi)^{\mathbb{N}}$ satisface $x_n \to a$, entonces $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene un v.a. en $\Phi(a)$.*

Demo. (1) $\implies$ (2). Supongamos que ningún punto de $\Phi(a)$ es v.a. de $\{y_n\}$.
▸ v.a. Esto implica que $\forall b \in \Phi(a)$ existen un entorno abierto V_b de b y un índice n_b t.q. $\forall m \geqslant n_b$ tenemos que $y_m \notin V_b$. Ya que $\Phi(a)$ es compacto, $\Phi(a) \subset V := V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_q}$. Sea

$$n_0 := \max\{n_{b_1}, \ldots, n_{b_q}\}.$$

Entonces $\forall m \geqslant n_0$ tenemos que $y_m \notin V$. Por otro lado, ya que Φ es semicont. sup. en a, para todo m suficientemente grande debemos tener que $y_m \in \Phi(x_m) \subset V$, una contradicción.

(2) $\implies$ (1). Sea $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base local numerable *decreciente* de a. Si Φ no es semicont. sup. en a, existe un abierto V, $\Phi(a) \subset V$ t.q. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists x_i \in W_i$ t.q. $\Phi(x_i) \not\subset V$. Lo que implica que $\exists y_i \in \Phi(x_i)$ con $y_i \notin V$. Por ser $W_i \supset W_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{i\to\infty} x_i = a$. Claramente, la sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tiene un v.a. en $\Phi(a)$, lo que contradice (2).

Ahora sea $\{y_n\}$ una sucesión en $\Phi(a)$. Entonces tomando $x_n := a$, $\forall n$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Así pues, por (2) $\{y_n\}$ tiene un v.a. en $\Phi(a)$. Como la sucesión $\{y_n\}$ es arbitraria, el conjunto $\Phi(a)$ es compacto. □

Corolario 15

Sea Φ una correspondencia compacto-no-vacío valorada entre X (esp. topol. que satisface el p.a.n.) e Y (esp. métr.). Entonces Φ es semicont. sup. en $a \in X$ si y sólo si para toda sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ en el grafo de Φ que satisface $x_n \to a$, la sucesión $\{y_n\}$ tiene un v.a. en $\Phi(a)$.

Proposición 16

Sean X, Y esps. topols.. Sean $\Gamma\colon X \rightrightarrows Y$ no-vacío valorada t.q. $\mathrm{Gr}(\Gamma)$ es cerrado en $X \times Y$. Entonces, $\forall a \in X$ el conjunto $\Gamma(a)$ es cerrado en Y (es decir, Γ es cerrado-valorada).

Demo. Sea b un punto de acumulación cualquiera de $\Gamma(a)$. Si probamos que $b \in \Gamma(a)$, por el Teorema 36 (1) habremos demostrado que $\Gamma(a)$ es cerrado. En todo entorno V de b existen $y \in \Gamma(a)$,$y \neq b$. $\Longrightarrow$ (a, b) es punto de acumulación de $\mathrm{Gr}(\Gamma)$, pues si U y V son entornos de a y b, respectivamente, se tiene que $\exists (a, y) \in \mathrm{Gr}(\Gamma)$ en $U \times V$ con $y \neq b$. Y, como $\mathrm{Gr}(\Gamma)$ es cerrado, se sigue que $(a, b) \in \mathrm{Gr}(\Gamma) \iff b \in \Gamma(a)$.

$\square$

Sigue de la demostración del Teorema 5 . . .

Teorema 5. Repetido, por comodidad. *Sean X un esp. topol. que satisface el p.a.n. e Y un esp. métr.. Sean $\Phi, \Psi \colon X \rightrightarrows Y$ no-vacío valoradas t.q. Φ es compacto valorada y Ψ es una subcorrespondencia de Φ con $\mathrm{Gr}(\Psi)$ cerrado en $X \times Y$. Si Φ es semicont. sup. en $a \in X$, entonces Ψ es semicont. sup. en a.*

Demo. Sea $a \in X$. Supongamos que una sucesión $\{(x_n, y_n)\} \in \mathrm{Gr}(\Psi)^{\mathbb{N}}$ satisface que $x_n \to a$. Entonces, por el Teorema 7, $\{y_n\}$ tiene un v.a. $b \in \Phi(a)$. Afirmamos que $b \in \Psi(a)$. Para ver esto, sea $\{y_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{y_n\}$ que converge a b en Y. Pero entonces, como $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in \mathrm{Gr}(\Psi)$ para cada k, $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (a, b)$ y $\mathrm{Gr}(\Psi)$ es cerrado, inferimos que $(a, b) \in \mathrm{Gr}(\Psi)$. Así pues, $b \in \Psi(a)$, y ya que Ψ es compacto-no-vacío valorada, se sigue por el Corolario 15 que Ψ es semicont. sup. en a.

$\square$

Con esto, concluye la demostración del Teorema 5. Y aquí doy por terminados estos seminarios. Muchas gracias por vuestra atención.

Referencias

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite dimensional analysis.* Springer, Berlin, 2006.

[2] J.P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Birkhäuser, 2009.

[3] J. Bochnak, M. Coste and M.F. Roy. *Real algebraic geometry.* Springer, Berlin, 1998.

[4] J. V. Burke, A. S. Lewis and M. L. Overton. Optimization and pseudospectra, with applications to robust stability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **25**, 1, (2003) 80–104.

[5] G. Choquet. *Cours d'analyse. Tome II. Topologie*. Masson et Cie., Paris, 1964.

[6] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[7] Abebe Geletu. *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps (Lecture Notes)*. Institute of Mathematics, Department of Operations Research and Stochastics, Ilmenau University of Technology, Germany, 2006. `https://www.tu-ilmenau.de/prozessoptimierung/mitarbeiter/dr-rer-nat-habil-abebe-geletu-w-selassie/`

[8] M. Karow. *Geometry of spectral value sets.* Ph.D. Thesis, Universität Bremen, 2003.

[9] Rajiv Sethi. Continuity of correspondences. `https://www.youtube.com/watch?v=OJfzJhsC3Rc&t=460s`

[10] D. Sukumar and S. Veeramani. Continuity of a condition spectrum and its level sets. *J. Aust. Math. Soc.*, **108** (2020) 412-430.

Definición 17

Dados un conjunto X y una colección $\Sigma \subset P(X)$. Sea $\tau(\Sigma)$ la mínima topología que contiene a Σ. A la colección Σ se le llama una **subbase** de $\tau(\Sigma)$.

Teorema 18 (Theorem 3.1, p. 65, de [6])

Dada cualquier *colección Σ de subconjuntos de X, existe una única, mínima topología $\tau(\Sigma) \supset \Sigma$. La topología $\tau(\Sigma)$ puede ser descrita así: Está formada por $\emptyset, X$, todas las intersecciones finitas de miembros de Σ, y todas las uniones arbitrarias de estas intersecciones finitas.*

Definición 19

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{A} \subset \tau$ de subconjuntos de X es una **base** de τ si cada miembro de τ es unión de miembros de $\mathcal{A}$.

Observación

Si $\mathcal{A}$ es una base de τ, entonces necesariamente $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$.

Teorema 20

Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X que satisface:

(1) *Para cada par $U, V \in \mathcal{B}$ t.q. $U \cap V \neq \emptyset$ y para cada $x \in U \cap V$, existe un $W \in \mathcal{B}$ que satisface $x \in W \subset U \cap V$.*

(2) $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(3) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

Entonces la colección $\tau(\mathcal{B})$ que está formada por todas las uniones de miembros de $\mathcal{B}$, es una topología sobre X; esto es, $\mathcal{B}$ es una base de alguna *topología. Además, $\tau(\mathcal{B})$ es única y es la menor topología que contiene a $\mathcal{B}$.*

Corolario 21

Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X t.q. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Si para todo par $U, V \in \mathcal{A}$ se tiene que $U \cap V \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es base de una topología en X.

Sea X un esp. topol.

Definiciones

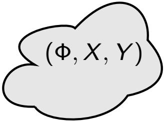
- Un **entorno de un punto** p de X es cualquier conjunto $N \subset X$ que contiene a un abierto V que contiene a p: $p \in V \subset N$.
- Un **entorno de un conjunto** $A \subset X$ es cualquier conjunto $N \subset X$ que contiene a un abierto V que contiene a A: $A \subset V \subset N$.
- Un elemento $p \in X$ es **punto interior** de $A \subset X$ si existe un entorno V_p de p contenido en A: $p \in V_p \subset A$.

Propiedades

- Un conjunto es *abierto* si y sólo si es entorno de todos sus puntos.
- Un conjunto A es *abierto* si y sólo si todos sus elementos son puntos interiores de A.

Funciones y correspondencias

$$\begin{aligned}\Phi\colon X &\to P(Y) \\ x &\mapsto \Phi(x)\end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned}\Phi\colon X &\rightrightarrows Y \\ x &\mapsto \Phi(x) \subset Y\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f\colon X &\to H(Y) \\ x &\mapsto f(x)\end{aligned} \qquad \overset{\Phi(x):=f(x)}{\Longleftrightarrow} \qquad \begin{aligned}\Phi\colon X &\rightrightarrows Y \\ x &\mapsto \Phi(x) \subset Y\end{aligned}$$

¿Tautología?

$\boxed{f(x) = \Phi(x)}$, $\quad$ f es continua $\Longleftrightarrow$ Φ es continua

Necessary conditions: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\eta > 0$ adequate to A. Then $\exists r > 0$ s.t. $\forall A' \in B(A, r) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$:

(i)
$$\Lambda(A') \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda(A)} B(\alpha, \eta),$$

(ii)
$$\bigcup_{\mu\in\Lambda(A')\cap B(\alpha,\eta)} \mathrm{w}(\mu, A') \prec \mathrm{w}(\alpha, A), \quad \forall \alpha \in \Lambda(A).$$

Perturbation of the Jordan form, 2

Sufficient conditions: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\eta > 0$ adequate to A. $\forall \alpha \in \Lambda(A)$ let $t_\alpha \in \mathbb{N}^*$ and let $b_{\alpha 1}, \ldots, b_{\alpha t_\alpha}$ be non-null partitions. Then $\forall \delta > 0, \exists A'$ s.t. $\|A' - A\| < \delta$ and

(i)
$$\Lambda(A') \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda(A)} B(\alpha, \eta),$$

(ii) $\forall \alpha \in \Lambda(A)$ the matrix A' has precisely t_α eigenvalues $\mu_{\alpha 1}, \ldots, \mu_{\alpha t_\alpha}$ in $B(\alpha, \eta)$ and
$$b_{\alpha j} = \mathrm{w}(\mu_{\alpha j}, A') \quad (j = 1, \ldots, t_\alpha),$$

if and only if
$$\bigcup_{j=1}^{t_\alpha} b_{\alpha j} \prec \mathrm{w}(\alpha, A), \quad \forall \alpha \in \Lambda(A).$$

Sea (X,τ) un esp. topol., $A \subset X$. El conjunto

$$\tau_A := \{A \cap \Omega \colon \Omega \in \tau\}$$

es una topología sobre A.

Al espacio (A, τ_A) se le llama **subespacio topológico** del esp. topol. (X,τ).

Proposición 22 (Theorem 7.2 (1) de [6])

Sea (A, τ_A) un subespacio topológico de (X,τ), con $A \subset X$. Si $\mathscr{B}$ es una base (subbase) de τ, entonces

$$\{A \cap U \colon U \in \mathscr{B}\}$$

es una base (subbase) de τ_A.

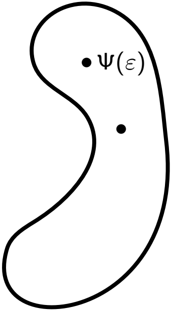
En el subespacio A, los entornos de un punto $a \in A$ son los conjuntos $A \cap V$, donde V es un entorno de a en X.

Pseudoespectro estricto

$\varepsilon \in [\varepsilon_0(A), \infty)$

$$\Psi(\varepsilon) := \bigcup_{\substack{Z \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ \|Z-A\| \leqslant \varepsilon}} \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z); \quad \Psi'(\varepsilon) := \bigcup_{\substack{Z \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ \|Z-A\| < \varepsilon}} \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z)$$

$$\Psi(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) \leqslant \varepsilon\}; \quad \Psi'(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) < \varepsilon\}$$



$$\partial\Psi(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) = \varepsilon\}$$

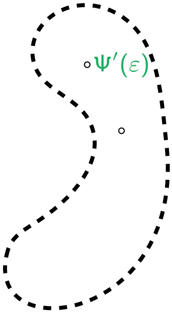
$\Psi'(\varepsilon) \subset \widehat{\Psi(\varepsilon)}^{\circ}$. Puede ocurrir que $\Psi'(\varepsilon) \neq \widehat{\Psi(\varepsilon)}^{\circ}$

Pseudoespectro estricto

$\varepsilon \in [\varepsilon_0(A), \infty)$

$$\Psi(\varepsilon) := \bigcup_{\substack{Z\in\mathbb{C}^{n\times n}\\ \|Z-A\|\leqslant\varepsilon}} \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z); \quad \Psi'(\varepsilon) := \bigcup_{\substack{Z\in\mathbb{C}^{n\times n}\\ \|Z-A\|<\varepsilon}} \Lambda_k^{\mathrm{g}}(Z)$$

$$\Psi(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) \leqslant \varepsilon\}; \quad \Psi'(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) < \varepsilon\}$$



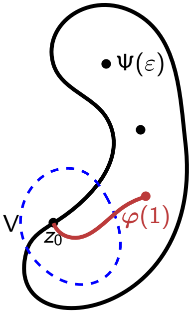
$$\partial\Psi(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \colon \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) = \varepsilon\}$$

$\Psi'(\varepsilon) \subset \overset{\circ}{\widehat{\Psi(\varepsilon)}}$. Puede ocurrir que $\Psi'(\varepsilon) \neq \overset{\circ}{\widehat{\Psi(\varepsilon)}}$

Lema 23 (Curve-selection Lemma, Theorem 2.5.5 de [3])

Sean A un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^n$ y $p_0 \in \overline{A}$. Entonces existe una función semialgebraica continua *$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\varphi(0) = p_0$ y $\varphi(t) \in A$ para todo $t \in (0,1]$.*

Los subconjuntos S:= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_{n-k+1}\big((x+y\mathrm{i})I_n - A\big) \leqslant \varepsilon\}$ y $S' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_{n-k+1}\big((x+y\mathrm{i})I_n - A\big) < \varepsilon\}$ de $\mathbb{R}^2$ son semialgebraicos. Además, $\overline{S'} = S$ Entonces, dado un $(x_0, y_0) \in S$, existe una función semialgebraica continua $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ y $\varphi(t) \in S'$ para todo $t \in (0,1]$.

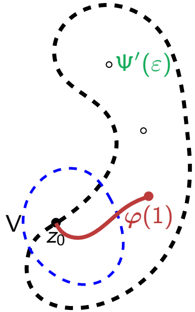


Semicont. inf.

Lema 23 (Curve-selection Lemma, Theorem 2.5.5 de [3])

Sean A un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^n$ y $p_0 \in \overline{A}$. Entonces existe una función semialgebraica continua *$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ t.q. $\varphi(0) = p_0$ y $\varphi(t) \in A$ para todo $t \in (0,1]$.*

Los subconjuntos S:= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_{n-k+1}\big((x+y\mathrm{i})I_n - A\big) \leqslant \varepsilon\}$ y $S' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_{n-k+1}\big((x+y\mathrm{i})I_n - A\big) < \varepsilon\}$ de $\mathbb{R}^2$ son semialgebraicos. Además, $\overline{S'} = S$ Entonces, dado un $(x_0, y_0) \in S$, existe una función semialgebraica continua $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ t.q. $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ y $\varphi(t) \in S'$ para todo $t \in (0,1]$.



Semicont. inf.

$$\zeta \in \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) \Longrightarrow \exists Z \in \overline{B(A,\varepsilon)} \text{ t.q. } \zeta \in \Lambda(Z) \Longrightarrow |\zeta| \leqslant \|Z\| = \|Z - A + A\|$$

$$\Downarrow$$

$$|\zeta| \leqslant \|Z - A\| + \|A\| \leqslant \varepsilon + \|A\|; \Longrightarrow \Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) \text{ es acotado.}$$

Como

$$\Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{n-k+1}(zI_n - A) \leqslant \varepsilon\},$$

$\Lambda^{\mathrm{g}}_{\varepsilon,k}(A)$ es cerrado.

$\square$

Apéndice, Topología, 5

$p \in \Omega \subset V$

Proposición 24

Sean (X, τ) *en esp. topol. y* $A \subset X$*. Entonces*

$$A \quad \textit{es abierto} \quad \Longleftrightarrow \quad A \quad \textit{es entorno de todos sus puntos.}$$

Demo.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $p \in A$, A abierto $\quad \Longrightarrow \quad A$ es entorno de p.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\forall p \in A$, A es entorno de p, $\quad \Longrightarrow \quad \exists \Omega_p$ abierto t.q. $p \in \Omega_p \subset A$. $\Longrightarrow$

$$A = \bigcup_{p \in A} \{p\} \subset \bigcup_{p \in A} \Omega_p \subset A. \Longrightarrow$$

$$A = \bigcup_{p \in A} \Omega_p, \Longrightarrow$$

A es abierto, pues es unión de los abiertos Ω_p. $\square$

Definición 25 (Choquet, Définition 16–1 de [5])

En un espacio *métrico* E se dice que un subconjunto A de E es **abierto** si es *vacío* o unión de bolas abiertas de radio positivo.

Continuidad mediante las imágenes inversas de una subbase

Sea $f : X \to Y$ una función. Si $A_1, \dots, A_n \subset Y$, se tiene que

$$f^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n),$$
$$f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n).$$

Teorema 26

Sean X, Y esps. topols., y $f : X \to Y$ una función. Son equivalentes:

(1) *f es continua.*

(2) *La imagen inversa de cada miembro de una subbase(base) para Y es abierta en X.*

Demo. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea Σ una subbase para Y. Si f es continua, $\forall S \in \Sigma$, $f^{-1}(S)$ es abierto.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Sea $\mathcal{F} := \{\mathcal{R} \subset \Sigma \mid \mathcal{R} \text{ es finito}\}$. Para cada abierto $V \subset Y$ existe un $\mathcal{F}_V \subset \mathcal{F}$ t.q.

$$V = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathcal{F}_V} \bigcap_{S \in \mathcal{R}} S; \Longrightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathcal{F}_V} \bigcap_{S \in \mathcal{R}} f^{-1}(S). \qquad \square$$

Sean (X, τ) un esp. topol. y $p \in X$; denotaremos por $\mathcal{V}(p)$ al conjunto de todos los entornos de p.

Definición 27

Se dice que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(p)$ es una **base** de $\mathcal{V}(p)$ (o **base local** de p) si todo $V \in \mathcal{V}(p)$ contiene un $W \in \mathcal{B}$.

Se dice que el espacio (X, τ) satisface el **primer axioma de numerabilidad** (*first countable*) si cada punto tiene una base local finita o numerable.

Proposición 28

Si el esp. topol. (X, τ) *satisface el* primer axioma de numerabilidad, *entonces para cada* $p \in X$ *existe una base local numerable* $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k \supset \cdots$.

Demo. Sea $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ una base local numerable de p. Definamos

$$W_k := U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Como $A, B \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{V}(p); \Rightarrow \forall k = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que $W_k \in \mathcal{V}(p)$.
Para todo $V \in \mathcal{V}(p)$ $\exists U_{i_0}$ t.q. $p \in U_{i_0} \subset V$. Dado que

$$W_{i_0} = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_{i_0} \subset U_{i_0}; \Rightarrow p \in W_{i_0} \subset V.$$

Por lo tanto, $\{W_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base local numerable decreciente de p. $\square$

Ínfimo de un conjunto de números reales

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $c \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de A si $c \leqslant x$, $\forall x \in A$. Diremos que A está **acotado inferiormente** si A tiene alguna cota inferior.

Teorema 29

Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferiormente. Entonces el conjunto $L(A)$ de la cotas inferiores de A, tiene un elemento máximo.

¡Atención!

$$\inf A := \max L(A)$$

Cuestión: ¿Se puede asegurar que

$$\inf A < x, \quad \forall x \in A?$$

¡No! Sólo podemos asegurar que $\inf A \leqslant x, \forall x \in A$, pues $\inf A$ es una cota inferior de A.

$K, C \in H(Y)$. Supongamos que un número $\delta > 0$ satisface:

$$K \subset V(C, \delta) \ \wedge \ C \subset V(K, \delta).$$

¿Podemos afirmar que $\mathrm{d}_H(K, C) < \delta$? ¿o que $\mathrm{d}_H(K, C) \leqslant \delta$?
Sabemos que $\mathrm{d}_H(K, C)$ es el extremo inferior del conjunto

$$\{\eta > 0 \,|\, K \subset V(C, \eta) \ \wedge \ C \subset V(K, \eta)\}; \implies \mathrm{d}_H(K, C) \leqslant \delta.$$

Duda.- Sean X, Y esps. topols.. Sea $f : X \to Y$ una función. Sea $a \in X$.

f es continua en $a \quad \Rightarrow \quad$ Para toda sucesión $x_n \to a$, se tiene que $f(x_n) \to f(a)$.

$\boxed{¿f \text{ es continua en } a \Longleftarrow \text{Para toda sucesión } x_n \to a, \text{ se tiene que } f(x_n) \to f(a)?}$

Respuesta.- En general, ¡no!

Si X satisface el *primer axioma de numerabilidad*, la implicación $\Longleftarrow$ es verdadera.

Teorema 30

Sean X, Y esps. topols.. Sea $f : X \to Y$ una función. Sea $a \in X$. Entonces

$\boxed{f \text{ es continua en } a \iff \text{Para toda red } x_\alpha \to a, \text{ se tiene que } f(x_\alpha) \to f(a).}$

Definición 31

$(D, \leqslant)$ es un **conjunto dirigido** si $\leqslant$ es un preorden en D t.q. para todo par $\alpha, \beta \in D$, $\exists \gamma \in D$ que satisface $\alpha \leqslant \gamma$ y $\beta \leqslant \gamma$. Una **red** en un conjunto X es una función $x : D \to X$, donde D es un conjunto dirigido.

Notas.-

- D puede ser **infinito no numerable**.
- Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ en un esp. topol. (X, τ) **converge** a $a \in X$ si para cada entorno V de a existe algún $\alpha_0 \in D$ (que depende de V) t.q. $x_\alpha \in V$, $\forall \alpha \geqslant \alpha_0$.
- Ejemplo.- Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Llamaremos **partición** de $[a, b]$ a cualquier subconjunto finito P de $[a, b]$ que contiene a $\{a, b\}$. Dadas P, Q particiones, se tiene que $P, Q \subset P \cup Q$. Por lo tanto, el conjunto de particiones Π de $[a, b]$ con el orden $\subset$ es un conjunto dirigido. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P \in \Pi$, y sean $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ los elementos de P ordenados en sentido creciente (n depende de P). Definamos

$$S_f(P) := \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i), \text{ suma de Riemann.}$$

  $S_f : \Pi \to \mathbb{R}$ define una red. Si f es **integrable Riemann**, se tiene que la red S_f converge a $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x$.

Valores de adherencia de una sucesión

Sean X un esp. topol. y $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X. Se dice que un punto $p \in X$ es un **valor de adherencia (v.a.)** de esta sucesión si para cada par $(V, i) \in \mathcal{V}(p) \times \mathbb{N}$ existe un $j \geqslant i$ t.q. $a_j \in V$.

$$p \text{ es v.a. de } (a_i) \text{ si } \forall (V, i) \in \mathcal{V}(p) \times \mathbb{N}, \exists j \geqslant i, a_j \in V.$$
$$p \text{ no es v.a. de } (a_i) \text{ si } \exists (V, i) \in \mathcal{V}(p) \times \mathbb{N}, \forall j \geqslant i, a_j \notin V.$$

◂ Demo. Teorema 7

Sea $i_0 < i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} < \cdots$ una sucesión estrictamente creciente de $\mathbb{N}$. A la sucesión $(a_{i_k})_{k=0}^{\infty}$ se le llama **subsucesión** de $(a_i)_{i=0}^{\infty}$.

Proposición 32 (Véase 6.1 (2), pág. 217 de [6])

Sea X un esp. topol. que satisface el primer axioma de numerabilidad. Entonces p es un v.a. de $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ si y sólo si existe alguna subsucesión $(a_{i_k})_{k=0}^{\infty}$ que converge a p cuando $k \to \infty$.

Funciones reales semicontinuas

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se llama **límite superior (resp. inferior)** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al mayor (resp. menor) de sus límites subsecuenciales. Se denotan por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n,$$

respectivamente. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente (resp. inferiormente), definimos

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad (\text{resp.} \ \liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice **semicont. sup.** en $a \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U_a(\varepsilon)$ de a t.q. $\forall x \in U_a(\varepsilon)$,

$$f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice **semicont. inf.** en $a \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U_a(\varepsilon)$ de a t.q. $\forall x \in U_a(\varepsilon)$,

$$f(a) - \varepsilon < f(x).$$

Lema 33

Supongamos que el esp. topol. X satisface el primer axioma de numerabilidad. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Entonces:

- *f es semicont. sup. en $a \iff [x_n \to a \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(a)]$.*
- *f es semicont. inf. en $a \iff [x_n \to a \Rightarrow f(a) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n)]$.*

Proposición 34 (Proposition 9-4, pág. 26 de[5])

Sea f una aplicación de un esp. topol. X en un subespacio topol. Y de un esp. topol. Z.
Decir que f es continua en un punto $a \in X$ equivale a decir que f, considerada como aplicación de X en Z es continua en a.

Demo. Los entornos de $f(a)$ en Y son los conjuntos $V \cap Y$, donde V es un entorno de $f(a)$ en Z; se tiene que

$$f^{-1}(V \cap Y) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V).$$

$\square$

Nuestro caso.- Sea la correspondencia $\Phi : X \rightrightarrows Y$ compacto-no-vacío valorada, continua en $a \in X$. Sea $f : X \to (P_0(Y), \tau_V)$ dada por $f(x) = \Phi(x), \forall x \in X$. Dado que f es continua en a y $(H(Y), (\tau_V)_{H(Y)})$ es un subespacio topol. de $(P_0(Y), \tau_V)$, se tiene que $f : X \to (H(Y), (\tau_V)_{H(Y)})$ es continua en a.
Pero, $(\tau_V)_{H(Y)} = \tau_H$. Por tanto, $f : X \to (H(Y), \tau_H)$ es continua en a.
Y aquí finaliza la demostración del Teorema 3.

Final Demo. Teorema 3

Teorema 35

Sea Y un esp. métr. y $K \subset Y$. Entonces son equivalentes:

(1) *K es compacto;*

(2) *Toda sucesión de puntos de K tiene al menos un valor de adherencia en K;*

(3) *Toda sucesión de puntos de K tiene alguna subsucesión convergente, con límite en K;*

(4) *Toda parte infinita de K tiene al menos un punto de acumulación en K.*

Teorema 36

Sea Y un esp. topol. y $C \subset Y$. Tenemos que

(1) *C es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

(2) *Si Y es un espacio separado (o de Hausdorff):*
   - *Si C es cerrado, $C \subset K$ y K es compacto, entonces C es compacto.*
   - *Todo compacto es cerrado.*