Universidad del País Vasco
Matemática Aplicada y Estadística

La Integral Multiplicativa

Juan-Miguel Gracia

Extracto: Se analiza la relación de la integral multiplicativa de Volterra con la derivada logarítmica y los sistemas diferenciales lineales.

mepgrmej@vc.ehu.es
21 de octubre de 2001 Versión preliminar

Índice General

1. Introducción

Es conocido que la derivada logarítmica de una función $y(x)$ se define como

$$\mathrm{dl}\, y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)};$$

se puede probar que la derivada logarítmica de un producto (resp., cociente) de dos funciones es igual a la suma (resp., diferencia) de sus derivadas logarítmicas.

Sea f una función compleja definida en un intervalo $[a, b]$, integrable Riemann. Si $P = \{a = s_0, s_1, \ldots, s_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, sea $\Delta s_k := s_k - s_{k-1}$ para $k = 1, \ldots, n$. Sea $\mu(P)$ la malla de la partición P (longitud máxima de sus subintervalos). Una definición de la integral ordinaria (aditiva) es

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t := \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta s_k.$$

Es obvio que

$$\exp \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\mu(P)\to 0} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta s_k\right) = \lim_{\mu(P)\to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{f(s_k)\Delta s_k} \qquad (1)$$

por lo tanto, la integral multiplicativa que va a ser definida queda sugerida.

2. Variable real

La definición de la integral multiplicativa como límites de productos finitos de Riemann es como sigue: Si $P = \{a = s_0, s_1, \ldots, s_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, sea $\Delta s_k := s_k - s_{k-1}$ para $k = 1, \ldots, n$. Sea $\mu(P)$ la malla de la partición P (longitud máxima de sus subintervalos). Una definición de la integral multiplicativa de una función $A\colon [a, b] \to \mathbb{C}^{n\times n}$, es

$$\prod_a^b \mathrm{e}^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} := \lim_{\mu(P)\to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{A(s_k)\Delta s_k}.$$

Una función compleja $f(t), a \leq t \leq b$, puede ser vista como una función matricial con valores en $\mathbb{C}^{1\times 1}$; de (1) deducimos que f es integrable multiplicativamente si y sólo si es integrable aditivamente, y que

$$\prod_a^b e^{f(\tau)\,d\tau} = e^{\int_a^b f(\tau)\,d\tau}. \tag{2}$$

De hecho, la ecuación (2) es un caso particular de un resultado más general: Si cualquier par de valores de la función matricial $A\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ conmutan, i.e. para todos $t_1, t_2 \in [a,b]$, $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$, entonces puede demostrarse que

$$\prod_a^b e^{A(\tau)\,d\tau} = e^{\int_a^b A(\tau)\,d\tau}.$$

El "matrician"

Se llama "matrician" ("matriciant" en inglés [1, pág. 3], "matrizant" en francés [3, pág. 121]) a la expresión

$$I_n + \int_a^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_a^t A(\tau) \int_a^\tau A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau + \cdots$$

de la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A(t)X, \\ X(a) = I_n. \end{cases} \tag{3}$$

Se puede probar que $\prod_a^t \mathrm{e}^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$ es la solución del problema (3). De aquí, que si definimos la *derivada logarítmica* de una función matricial $X(t)$ mediante la expresión

$$\mathrm{D}_t\, X := \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} X^{-1},$$

se sigue el “teorema fundamental del cálculo integral multiplicativo”:

$$\mathrm{D}_t \prod_a^t \mathrm{e}^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = A(t).$$

Además, si $F(t)$ es una función matricial tal que $\mathrm{D}_t\, F(t) = A(t)$, entonces tenemos la “regla de Barrow multiplicativa”:

$$\prod_a^b \mathrm{e}^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = F(b)F(a)^{-1}.$$

Cuando G y H son dos funciones matriciales tales que

$$\mathrm{D}_t\, G(t) = \mathrm{D}_t\, H(t)$$

para todo t de un intervalo, entonces G y H difieren en factor constante $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$G(t) \equiv H(t)C.$$

Otra definición análoga a

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

es

$$\prod_{b}^{a} e^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} := \left(\prod_{a}^{b} e^{A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \right)^{-1}.$$

La fórmula del cambio de variables queda así [2, pág. 27]:

$$\prod_{a}^{b} e^{A(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s} = \prod_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^{A(t)\,\mathrm{d}t}.$$

siendo $t = \varphi(s)$.

3. Variable compleja

Si $A\colon \Omega \to \mathbb{C}^{n\times n}$ es una función matricial continua definida en un dominio Ω del campo complejo, se puede definir la integral multiplicativa de $A(z)$ a lo largo de un camino Γ, parametrizado por $z = z(t), a \le t \le b$, y situado dentro del dominio, por la fórmula:

$$\prod_{\Gamma} \mathrm{e}^{A(z)\,\mathrm{d}z} := \prod_{a}^{b} \mathrm{e}^{A(z(\tau))z'(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Si Ω es un dominio simplemente conexo, la función matricial $A(z)$ es una función holomorfa y Γ es un camino cerrado, se tiene que

$$\oint\!\!\!\!\!\prod_{\Gamma} \mathrm{e}^{A(z)\,\mathrm{d}z} = I_n,$$

que es el resultado análogo al Teorema de Cauchy que nos dice que la integral ordinaria a lo largo de un contorno cerrado es nula.

⇑

Referencias

[1] L. Y. Adrianova. *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1995. 6

[2] J. D. Dollard and C.-N. Friedman. *Product Integration*. Addison-Wesley, 1979. 8

[3] F. R. Gantmacher. *Théorie des Matrices*, volume 2. Dunod, Paris, 1966. Traduit par Ch. Sarthou. 6

⇑

Sobre este documento

Este artículo ha sido escrito en LaTeX con ayuda del paquete web, escrito por D.P. Story. Véase http://www.math.uakron.edu/~dpstory/acrotex.html. Después el fichero fuente InteMult.tex ha sido compilado con pdflatex.