Límites de valores singulares de un haz de matrices

Juan-Miguel Gracia   Francisco E. Velasco

Universidad del País Vasco
Depto. de Matemática Aplicada y Estadística

XXI CEDYA / XI CMA, Ciudad Real, 22 de septiembre de 2009.

Índice

Índice

Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple a 0

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}, \qquad \det A \neq 0.$$

$$d := \min_{\substack{X\in\mathbb{C}^{m\times m} \\ 0 \text{ valor propio múltiple} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}}} \|X - D\|$$

$$d = \sup_{t\geq 0} f(t), \qquad f(t) := \sigma_{2m-1}\begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} := D - CA^{-1}B,\ \mathcal{N} := I_m + CA^{-2}B$$

Si $\nexists t_1 \geq 0$ t.q. $d = f(t_1)$, $\implies$ f acotada, estrict. creciente y $\operatorname{rg}\mathcal{N} = 1$.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} O & \mathcal{N} \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M} & O \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\ell := \lim_{t\to\infty} f(t), \quad \implies \quad d = \ell.$$

Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple a 0

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}, \qquad \det A \neq 0.$$

$$d := \min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{m\times m} \\ 0 \text{ valor propio múltiple} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}}} \|X - D\|$$

$$d = \sup_{t\geq 0} f(t), \qquad f(t) := \sigma_{2m-1}\begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} := D - CA^{-1}B,\ \mathcal{N} := I_m + CA^{-2}B$$

Si $\nexists t_1 \geq 0$ t.q. $d = f(t_1)$, $\implies$ f acotada, estrict. creciente y $\operatorname{rg} \mathcal{N} = 1$.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} O & \mathcal{N} \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M} & O \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\ell := \lim_{t\to\infty} f(t), \quad \implies \quad d = \ell.$$

Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple a 0

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}, \qquad \det A \neq 0.$$

$$d := \min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{m\times m} \\ 0 \text{ valor propio múltiple} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}}} \|X - D\|$$

$$d = \sup_{t\geq 0} f(t), \qquad f(t) := \sigma_{2m-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} := D - CA^{-1}B,\ \mathcal{N} := I_m + CA^{-2}B$$

Si $\nexists t_1 \geq 0$ t.q. $d = f(t_1)$, $\implies$ f acotada, estrict. creciente y $\operatorname{rg}\mathcal{N} = 1$.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} O & \mathcal{N} \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M} & O \\ O & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\ell := \lim_{t\to\infty} f(t), \quad \implies \quad d = \ell.$$

Planteamiento y ejemplo

$F, G \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

Problema

Hallar

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_i(tF+G), \qquad i = 1, 2, \ldots, \min(m,n).$$

Ejemplo

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & -2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 3\mathrm{i} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} F = 2, \qquad \sigma_i(tF+G).$$

Planteamiento y ejemplo

$F, G \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

Problema

Hallar

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_i(tF+G), \qquad i = 1, 2, \ldots, \min(m, n).$$

Ejemplo

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & -2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 3\mathrm{i} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} F = 2, \qquad \sigma_i(tF+G).$$

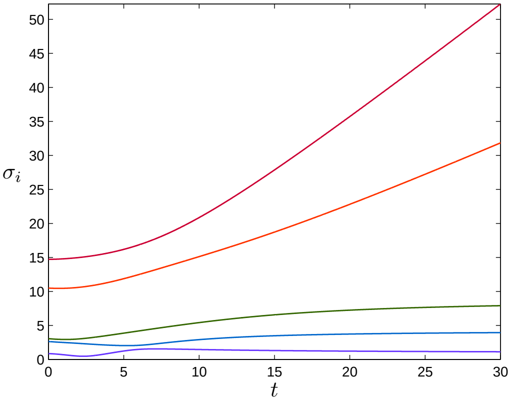

Figura: Los $5 = \text{mín}(5, 6)$ valores singulares de $tF + G$.

Valores singulares para algunos $t \gg 0$

$$
\begin{array}{ccc}
\sigma(10^4 F + G) & \sigma(10^5 F + G) & \sigma(10^6 F + G) \\
\begin{bmatrix} 17319{,}36 \\ 10000{,}01 \\ 8{,}74110 \\ 4{,}24321 \\ 0{,}94663 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 173203{,}93 \\ 100000{,}00 \\ 8{,}74221 \\ 4{,}24376 \\ 0{,}94612 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} 1732049{,}65 \\ 1000000{,}00 \\ 8{,}74232 \\ 4{,}24381 \\ 0{,}94607 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Índice

Acotación clásica

$A, E \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad i = 1, \ldots, \text{mín}(m, n),$

$$\boxed{|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq \|E\|}$$

¿$\exists c_i(\cdot) \geq 0$ t.q.

$$|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq c_i(E)?$$

Li y Li dieron una respuesta afirmativa si la matriz E tiene cierta estructura.

Notación

$X \in \mathbb{C}^{p\times q}$:

$$\sigma(X) := \left(\sigma_1(X), \sigma_2(X), \ldots, \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)\right)$$

donde

$$\sigma_1(X) \geq \sigma_2(X) \geq \cdots \geq \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)$$

$\sigma_i(X) := 0$ cuando $i > \text{rg}\, X$.

Acotación clásica

$A, E \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\quad i = 1, \ldots, \text{mín}(m, n)$,

$$\boxed{|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq \|E\|}$$

¿$\exists c_i(\cdot) \geq 0$ t.q.

$$|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq c_i(E)?$$

Li y Li dieron una respuesta afirmativa si la matriz E tiene cierta estructura.

Notación

$X \in \mathbb{C}^{p\times q}$:

$$\sigma(X) := \big(\sigma_1(X), \sigma_2(X), \ldots, \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)\big)$$

donde

$$\sigma_1(X) \geq \sigma_2(X) \geq \cdots \geq \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)$$

$\sigma_i(X) := 0$ cuando $i > \text{rg}\, X$.

Acotación clásica

$A, E \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad i = 1, \ldots, \text{mín}(m, n),$

$$\boxed{|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq \|E\|}$$

¿$\exists c_i(\cdot) \geq 0$ t.q.

$$|\sigma_i(A+E) - \sigma_i(A)| \leq c_i(E)?$$

Li y Li dieron una respuesta afirmativa si la matriz E tiene cierta estructura.

Notación

$X \in \mathbb{C}^{p\times q}$:

$$\sigma(X) := \big(\sigma_1(X), \sigma_2(X), \ldots, \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)\big)$$

donde

$$\sigma_1(X) \geq \sigma_2(X) \geq \cdots \geq \sigma_{\text{máx}(p,q)}(X)$$

$$\sigma_i(X) := 0 \text{ cuando } i > \text{rg}\, X.$$

Acotación de los Li, Li

Teorema (Li-Li, 2005)

$$\begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix},$$

$\varepsilon := \text{máx}(\|E_1\|, \|E_2\|), \quad \forall i = 1, 2, \ldots,$

$$\eta_i := \begin{cases} \text{mín}_{\mu_2 \in \sigma(G_2)} |\sigma_i - \mu_2| & \textit{si } \sigma_i \in \sigma(G_1), \\ \text{mín}_{\mu_1 \in \sigma(G_1)} |\sigma_i - \mu_1| & \textit{si } \sigma_i \in \sigma(G_2). \end{cases}$$

Entonces, $\forall i = 1, 2, \ldots,$

$$\left| \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix} - \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix} \right| \leq \frac{2\varepsilon^2}{\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 + 4\varepsilon^2}}.$$

Acotación de los Li, Li

Teorema (Li-Li, 2005)

$$\begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon := \text{máx}(\|E_1\|, \|E_2\|), \quad \forall i = 1, 2, \dots,$$

$$\eta_i := \begin{cases} \text{mín}_{\mu_2 \in \sigma(G_2)} |\sigma_i - \mu_2| & \textit{si } \sigma_i \in \sigma(G_1), \\ \text{mín}_{\mu_1 \in \sigma(G_1)} |\sigma_i - \mu_1| & \textit{si } \sigma_i \in \sigma(G_2). \end{cases}$$

Entonces, $\forall i = 1, 2, \dots,$

$$\left| \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix} - \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix} \right| \leq \frac{2\varepsilon^2}{\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 + 4\varepsilon^2}}.$$

Acotación de los Li, Li

Teorema (Li-Li, 2005)

$$\begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix}, \qquad E := \begin{pmatrix} O & E_1 \\ E_2 & O \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon := \text{máx}(\|E_1\|, \|E_2\|), \quad \forall i = 1, 2, \ldots,$$

$$\eta_i := \begin{cases} \text{mín}_{\mu_2 \in \sigma(G_2)} |\sigma_i - \mu_2| & \text{si } \sigma_i \in \sigma(G_1), \\ \text{mín}_{\mu_1 \in \sigma(G_1)} |\sigma_i - \mu_1| & \text{si } \sigma_i \in \sigma(G_2). \end{cases}$$

Entonces, $\forall i = 1, 2, \ldots,$

$$\left| \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & E_1 \\ E_2 & G_2 \end{pmatrix} - \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix} \right| \leq \frac{2\varepsilon^2}{\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 + 4\varepsilon^2}}.$$

$$\left| \sigma_i \left(\begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix} + E \right) - \sigma_i \begin{pmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{pmatrix} \right| \leq \frac{2\|E\|^2}{\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 + 4\|E\|^2}} = c_i(E).$$

Índice

Descomposición de valores singulares, SVD

$F, G \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $r = \operatorname{rg} F$. $\exists$ matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t.q.

$$U^* F V = \begin{pmatrix} S_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_r)$$

con $s_1 \geq \cdots \geq s_r > 0$ los v.s. $\neq 0$ de F. Supongamos

$$U^* G V = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con } G_{11} \in \mathbb{C}^{r\times r}. \quad \Longrightarrow$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ y para cada i,

$$\sigma_i(tF + G) = \sigma_i \begin{pmatrix} tS_1 + G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

Haz regular

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\sigma_i(A) - \sigma_1(B) \leq \sigma_i(A+B), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$S_1, G_{11} \in \mathbb{C}^{r\times r}$,

$$|t|s_i - \sigma_1(G_{11}) = \sigma_i(tS_1) - \sigma_1(G_{11}) \leq \sigma_i(tS_1 + G_{11})$$

$i = 1, \ldots, r$. Como $s_i > 0$, $\Longrightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_i(tS_1 + G_{11}) = \infty, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Teorema principal

Teorema

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_i(tF+G) =$$

$$\lim_{t\to\infty} \sigma_i \begin{pmatrix} tS_1 + G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{cases} \infty, & i = 1, \ldots, r := \operatorname{rg} F, \\ \sigma_{i-r}(G_{22}), & i = r+1, r+2, \ldots \end{cases}$$

Ion Zaballa

Aplicación al Ejemplo

$$G_{22} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4i & 0 & 0 \\ -4{,}0825 - 2{,}8577i & -0{,}8165i & 0{,}4082 + 2{,}0412i & 1{,}2247 \\ -6 + 2{,}1213i & 0{,}4714 + 1{,}3333i & 2{,}2357 - 0{,}0404i & -0{,}2357 - 0{,}6667i \end{pmatrix}$$

Sus valores singulares, *calculados* con MATLAB, son:

$$\begin{bmatrix} 8{,}74233 \\ 4{,}24382 \\ 0{,}94607 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sigma(10^4 F + G) & & \sigma(10^5 F + G) & & \sigma(10^6 F + G) \\ \begin{bmatrix} 17319{,}36 \\ 10000{,}01 \\ 8{,}74110 \\ 4{,}24321 \\ 0{,}94663 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 173203{,}93 \\ 100000{,}00 \\ 8{,}74221 \\ 4{,}24376 \\ 0{,}94612 \end{bmatrix} & , & \begin{bmatrix} 1732049{,}65 \\ 1000000{,}00 \\ 8{,}74232 \\ 4{,}24381 \\ 0{,}94607 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aplicación al Ejemplo

$$G_{22} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -4{,}0825 - 2{,}8577\mathrm{i} & -0{,}8165\mathrm{i} & 0{,}4082 + 2{,}0412\mathrm{i} & 1{,}2247 \\ -6 + 2{,}1213\mathrm{i} & 0{,}4714 + 1{,}3333\mathrm{i} & 2{,}2357 - 0{,}0404\mathrm{i} & -0{,}2357 - 0{,}6667\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Sus valores singulares, *calculados* con MATLAB, son:

$$\begin{bmatrix} 8{,}74233 \\ 4{,}24382 \\ 0{,}94607 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma(10^4F+G) & \sigma(10^5F+G) & \sigma(10^6F+G) \\ \begin{bmatrix} 17319{,}36 \\ 10000{,}01 \\ 8{,}74110 \\ 4{,}24321 \\ 0{,}94663 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 173203{,}93 \\ 100000{,}00 \\ 8{,}74221 \\ 4{,}24376 \\ 0{,}94612 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1732049{,}65 \\ 1000000{,}00 \\ 8{,}74232 \\ 4{,}24381 \\ 0{,}94607 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fin

Muchas gracias por vuestra atención.