Universidad del País Vasco
Matemática Aplicada y Estadística

xyz

Juan-Miguel Gracia

Extracto: Se destaca la importancia clave de los símbolos para la comprensión de las matemáticas que, sin ellos, serían ininteligibles. Se analiza la evolución de algunos de estos signos. Asimismo, se comenta la gran utilidad de la notación de Leibniz para la enseñanza del cálculo infinitesimal.

mepgrmej@vc.ehu.es
21 de enero de 2002

Versión final

Índice General

1. Introducción

Este artículo desea destacar el papel vital que las notaciones han tenido para el desarrollo y comprensión de las matemáticas. Ellas son una especie de lenguaje poético de las matemáticas, pues al igual que hace éste en lugar de la prosa, nos transmiten contenido en forma precisa. En la prosa el contenido se lee, se comprende y se olvidan las palabras exactas y su orden. En la poesía la forma hace recordar el contenido y revivirlo de una manera personal [9]. La forma estética del símbolo matemático es la que da emoción al contenido matemático y nos hace vibrar. Los signos empleados por las matemáticas en su evolución llegan a estar grávidos de significados y evocaciones.

Leibniz estaba de acuerdo con Platón en que los diagramas, figuras geométricas, y otros medios de notación eran, en general, meras ayudas para el pensamiento matemático, pero insistía en su importancia práctica. Los llamó "el hilo de Ariadna" que podía guiar la mente, y él estaba siempre a la búsqueda de "métodos de formación y ordenación de caracteres y signos de tal forma que representasen pensamientos, es decir, que estuviesen relacionados unos con otros como los pensamientos correspondientes". Al contrario que la mayor parte de los matemáticos de su tiempo hizo un estudio intenso de la notación. No en vano, Leibniz trató toda su vida de encontrar un lenguaje universal que permitiera reducir la averiguación de la verdad de una aserción a un mero cálculo algebraico. La presencia de los ordenadores en el mundo actual empieza a hacer verosímil este empeño. Véase por ejemplo el documento Lógica.

A Leibniz le entusiasmaban los ideogramas chinos, pues representaban cada uno un concepto distinto; en vez de los alfabetos cuyos signos representaban sonidos. Véase el libro[8], páginas 47 y 48.

⇑

2. Coherencia

Las notaciones deben ser coherentes en diversos aspectos:

- Orden: Las letras que representan elementos ordenados deben ir en el orden del abecedario (o alfabeto); por ejemplo, (1) $a < b$ (o $\alpha < \beta$), (2) el intervalo (α, ω) para referirse a $(-\infty, \infty.)$.

- Lingüístico: Se deben emparejar las letras griegas con sus letras latinas correspondientes; por ejemplo,

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

$$\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in G, \delta \in \Delta, \delta \in D, \ldots, \eta \in H,$$
$$\lambda \in L, \lambda \in \Lambda, \ldots, \sigma \in \Sigma, \xi \in X, \omega \in \Omega.$$

- Tradición: Se debe respetar la tradición, que no es otra cosa que la evolución natural del "idioma" de los símbolos matemáticos. El uso ha ido limando y puliendo las asperezas de los mismos. Así pues,

  - el nombre de una función debe utilizar una letra anterior a la que nombra su argumento o variable independiente: $f(x)$ y no $x(f)$;

- conviene que haya lejanía en las letras: $f(g,h)$ y $\frac{\partial f}{\partial g}$ suenan bizarro, $f(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial a}$ ya suenan mejor;
- para las variables independientes son preferibles las últimas letras $\ldots, t, x, y, z$.
- t, x, y son buenas para números reales;
- z, w son las letras canónicas para los complejos; no confundir w con ω para este menester.
- ε y δ son malas para los enteros;
- para éstos se prefieren las letras centrales i, j, k, l, m, n, p, q;
- para una integral,

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  es preferible a

  $$\int_f^g a(b)\,\mathrm{d}b, \int_i^j b(o)\,\mathrm{d}o, \int_f^z d(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ciencias: Es bueno no desafiar las notaciones usadas cuando las matemátic se aplican a las ciencias; siempre que sea posible.

- SIGLAS: Se debe evitar el recurso a las siglas y acrónimos constantemente: ... el sistema $\dot{x} = Ax + bu$ es SISO, pero el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es MIMO, mas aquel otro es BIBO. ... Las EDPs son muy importantes en matemática aplicada ....

- Cultural: A veces los símbolos matemáticos penetran en otros medios de expresión. Por ejemplo, el cuadradito de Halmos $\blacksquare$, utilizado para avisar del final de la demostración de un teorema, es utilizado por el periódico **El País** para señalar el fin de una noticia. Antes para denotar el fin de una prueba se utilizaba la sigla QED, del latín “quod erat demostrandum”. Algún autores castizos como Massera y Schäffer en su libro[10] sobre ecuaciones diferenciales utilizaron un ancla ⚓ para denotar tal final.

3. Evolución de algunas notaciones

Ante la dificultad de traducir matemáticas a otros idiomas (inglés, alemán, ruso, japonés, etc.) se oye decir a algunos que les gustaría una expresión matemática ausente de prosa. Sólo signos y nada más que signos. Ni una palabra. Por ejemplo, en el Libro I del tratado de Bourbaki [1] o en las páginas 38 y 39 del libro de Álgebra de Godement[6] se dan algunas muestras de lo que podría ser la escritura de matemáticas con sólo siete signos fundamentales

$$\vee, \neg, \tau, \square, =, \in, \supset$$

y *letras* sin subíndices. Un *ensamblaje* "assemblage" (en francés) se obtiene escribiendo una sucesión finita de signos y letras, donde ciertos de los signos τ que figuran en el ensamblaje pueden estar unidos a ciertos signos $\square$ por enlaces — por ejemplo, la expresión

$$\tau x \in y = \in \in yx = z\square \tag{1}$$

es un ensamblaje.

Sea A un ensamblaje, y sea x una letra; vamos a indicar un nuevo procedimiento para deducir un nuevo ensamblaje *que no contiene la letra*

x pero que se le designa sin embargo por la notación

$$\tau_x(\mathrm{A});$$

se obtiene efectuando las tres operaciones siguientes:

(a) se escribe el ensamblaje $\tau\mathrm{A}$ obtenido al poner el signo τ delante del ensamblaje A;

(b) se junta el signo τ que está situado delante de A a cada letra x, presente en A, por medio de un enlace;

(c) en el ensamblaje obtenido, se reemplaza en todos los sitios la letra x por el signo $\square$.

Si por ejemplo A es el ensamblaje (1), entonces $\tau_x(\mathrm{A})$ es el ensamblaje

$$\tau\tau\square \in y = \in\in y\square = z\square.$$

La operación que hace pasar de A a $\tau_x(\mathrm{A})$ es debida a Hilbert. El interés de la operación de Hilbert es el de dar un procedimiento perfectamente artificial pero puramente mecánico para construir efectivamente un objeto del cual se sabe *solamente* que satisface condiciones impuestas de antemano. En la práctica corriente, es completamente excepcional el tener que utilizar la operación de Hilbert.

Así pues, en teoría sería posible escribir todas las matemáticas con ensamblajes y sus criterios de formación. Lo cual es muy importante desde un punto de vista filosófico; además, la idea de un computador que demuestre teoremas y redacte matemáticas ha dejado de ser una utopía. Por ejemplo, la definición matemática completa del conjunto vacío, utilizando la operación de Hilbert, es que ϕ designa el objeto matemático

$$\tau_x[(\forall x)(x \notin X)];$$

que en lenguaje formalizado sería el ensamblaje

$$\phi = \tau \neg\neg\neg \in \tau \neg\neg \in \square\square\square.$$

Véase la página 68 del libro de Bourbaki[1]

Sin quitar un ápice de interés teórico a estos desarrollos de la lógica matemática, esta formalización estaría bien si los textos matemáticos los fuera a leer un ordenador, pero no parece muy adecuada para lectores humanos. Por eso, es motivo de gran admiración cómo pudo haber matemáticos que hicieron álgebra antes de inventarse los signos $=, +, -, \times$ y $\div$ para la igualdad, la suma, la resta, el producto y la división; o que como Ezra sabían el valor del número binómico $\binom{7}{k}$ para todo entero $k \leq 7$, aun antes de la existencia de ninguna de estas notaciones (véase [13]).

El libro clásico de Cajori [2] contiene en sus más de ochocientas páginas una historia detallada de las notaciones matemáticas que había hasta 1929. Puede consultarse la página web de Miller [11] para leer en línea la historia de algunos símbolos principales como $=, +, -, \times$, etc.

Cuando se leen libros editados 70 ó más años antes, enseguida se percibe un malestar causado por la extrañeza de sus notaciones: véanse por ejemplo los libros de Aitken y Turnbull sobre formas canónicas de matrices, o de Weddenburn sobre matrices. Es claro que las notaciones están contextualizadas en una época y sus evocaciones se nos escapan, haciendo muy difícil la comprensión de esos libros, incluso si sabemos, por obras más recientes, lo que quieren decir. A manera de ejemplo, analicemos la evolución de la notación empleada en los últimos 30 años para denotar el conjunto de matrices de m filas y n columnas formadas por números complejos:

$$M_{m,n}, M_{m,n}(\mathbb{C}), M_{m\times n}, M_{m\times n}(\mathbb{C}), \mathbb{C}_{m,n}, \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Las primeras notaciones incluyen la letra M para recordarnos a las Matrices, pero no dan información sobre la naturaleza de los elementos de estas matrices. Después se introdujo $\mathbb{C}$ para indicarnos de dónde procedían los elementos. Finalmente, por un proceso de depuración, estilización, y por razones estéticas (poéticas diría) se ha llegado a la notación

$$\mathbb{C}^{m\times n}.$$

Permítanme observar algunos significados "ocultos" que evoca este símbolo. Es decir, hablaremos de su polisemia. Para empezar, se ha suprimido la letra M por innecesaria. Un estudiante de bachillerato diría que $\mathbb{C}^{m\times n}$ suena a $\mathbb{C}$ elevado a "algo" $(m\times n)$; claro que sí: p^k es el número p elevado a la potencia k. Pero, la vía evolutiva desde p^k hasta $\mathbb{C}^{m\times n}$ pasa por la notación Y^X para denotar el conjunto de aplicaciones o funciones $f\colon X \to Y$, definidas en el conjunto X con valores en el conjunto Y. Si los conjuntos X e Y son finitos, el número de estas funciones es

$$|Y|^{|X|},$$

donde $|X|$ y $|Y|$ denotan los cardinales de X e Y, respectivamente. ¿Es que las matrices son funciones? Veamos esto con más detalle. Si A denota la matriz compleja de m filas y n columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

es obvio que la matriz A es un “cuadro” formados por los números $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_i$
Pero esta concepción pictórica de una matriz tiene el peligro de ser confundida con este otro “cuadro”

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

que es el determinante de una matriz cuadrada de orden n. Esta confusión prevaleció muchos años y se extendió a los manuales de, por ejemplo, química. Pues sí: las matrices son funciones. Así, la matriz A antes citada es la función del producto cartesiano

$$\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$$

de los conjuntos $\{1,\ldots,m\}$ y $\{1,\ldots,n\}$ en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos que al par (i,j) le asocia el número

$$A\big((i,j)\big) := a_{ij};$$

de manera formal,

$$\begin{array}{rcl} A\colon \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} & \to & \mathbb{C} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij}. \end{array}$$

Confío que ahora se percibirá que el "exponente" $m \times n$ de $\mathbb{C}^{m\times n}$ recuerda al producto cartesiano del conjunto $\{1,\ldots,m\}$ por el conjunto $\{1,\ldots,n\}$. Y, en general, $\mathbb{C}^{m\times n}$ sugiere el conjunto

$$\mathbb{C}^{\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$$

de funciones de $\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$ en $\mathbb{C}$.

La notación $\mathbb{C}^{m\times n}$ también nos trae reminiscencias de la notación X^k

para denotar el producto cartesiano de un conjunto X por sí mismo k veces:

$$X^k = X \times \overset{k}{\cdots} \times X,$$

que está formado por las k-tuplas $(x_1, \ldots, x_k)$ de elementos de X. De igual forma, cuando consideramos las matrices $m \times n$ como vectores de mn componentes, podemos identificar $\mathbb{C}^{m\times n}$ con el producto cartesiano $\mathbb{C}^{mn}$.

Otro ejemplo de notación que ha sufrido una evolución es el que se refiere a las sucesiones finitas de elementos y sus operaciones. Hace menos de un siglo se escribía $a, b, \ldots, u$ y $a + b + \cdots + u$, lo que ahora se prefiere denotar por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Lo mismo cabe decir de la notación para vectores con flecha encima $\vec{v}$ que ha evolucionado a quitarla y ponerlos en letra negrita $\boldsymbol{v}$.

⇑

4. Notaciones inadecuadas

Citaremos en primer lugar el caso del retraso inglés del cálculo infinitesimal frente a su desarrollo en Europa continental, debido a las desventajas de las notaciones empleadas por Newton respecto de las de Leibniz. Recordemos una fecha memorable, el día 11 de noviembre de 1675. Ese día Leibniz escribió por vez primera en un papel la fórmula

$$\int y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} y^2,$$

no meramente resolviendo una ecuación diferencial simple, lo cual era bastante trivial, sino que fue un acto grandioso, en el que forjó una herramienta poderosa: el signo integral. El signo de integración proviene de la letra S alargada (de "sumar"), y fue propuesto por Leibniz en una carta a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society, escrita en ese mismo año 1675. "Sería útil", sugería él, "para escribir en lugar de *omn.*", que se usaba hasta entonces para indicar la integración. Véase la página 50 de [8]. Curiosamente, el signo $\int$ también aparece en los violines y otros instrumentos de cuerda: ¿hay alguna relación entre ambos?

La historia temprana del cálculo infinitesimal abunda en muchos ejemplos de problemas que se resolvían con lo que en ese momento eran, virtualmente, ecuaciones diferenciales. Pero el valor histórico depende no tanto del número de fenómenos particulares que pueda explicar, cuanto de la coordinación de hechos diversos sometiéndolos a un código simple.

Newton llamaba *fluentes* a funciones de una variable *tiempo* y *fluxiones* eran las derivadas de estas funciones respecto del *tiempo*. Él emprendió la primera etapa del cálculo infinitesimal al clasificar las ecuaciones diferenciales de primer orden, conocidas como ecuaciones fluxionales, en tres clases.

La primera clase estaba formada por aquellas ecuaciones en las que dos fluxiones $\dot{x}$ e $\dot{y}$ y un fluente x ó y, estaban relacionados, como por ejemplo,

$$\text{(i)} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x), \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y),$$

lo que hace cien años se escribiría

$$\text{(i)} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

La clase segunda abarcaba aquellas ecuaciones que relacionaban dos fluxiones y dos fluentes así

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x, y).$$

La clase tercera estaba compuesta por las ecuaciones que relacionaban fluxiones con dos o más variables independientes; éstas son ahora llamadas ecuaciones en derivadas parciales.

A Leibniz se debe la notación diferencial actual y el uso del signo de integración. El lenguaje de las fluxiones, adoptado por Newton, se impuso por su autoridad a los matemáticos ingleses del siglo siguiente. Hubo una notoria controversia entre Newton y Leibniz que tuvo el efecto de privar a los matemáticos de su país de este sistema de notación, y durante más de un siglo Inglaterra fue estéril, mientras que en el Continente florecía el análisis matemático. Véanse las páginas 529–531 del libro de Ince [7].

El cálculo infinitesimal evolucionó de este modo intuitivo en manos de algunos genios. Tras la revolución francesa de 1789, al crearse las escuelas politécnicas, mucha más gente acudió a estudiar esta materia y hubo que esforzarse para ponerla en claro, lo que harían da Cunha [3], Cauchy, Riemann, Weierstrass y Dedekind, entre otros. Precisaron con definiciones no descriptivas los conceptos de función, límite, continuidad, derivada, integral definida y convergencia de series, y, de este modo, surgió el análisis matemático. Desde esos momentos, los planes de estudios recorrerían la materia en sentido inverso a su desarrollo histórico: primero, irían estas definiciones, después aparecerían en la escena las ecuaciones diferenciales.

Segundo ejemplo a citar: el de la integral multiplicativa. Inventada por Volterra en 1938 [12], matemático italiano del siglo XIX, esta noción no fructificó hasta 40 años después a causa de la notación usada por él. Si $A : [a, b] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ es una función matricial de una variable real definida en el intervalo $[a, b]$ y con valores en el espacio de matrices complejas cuadradas de orden n, la *integral multiplicativa* de A en el intervalo $[a, b]$ en la pág. 127 del libro 2°de Gantmacher[5] se denota por

$$\overset{\frown}{\int_a^b} [I_n + A(t)\,\mathrm{d}t], \tag{3}$$

donde I_n denota la matriz identidad de orden n (que en [5] pone E).

La definición de la integral multiplicativa como límites de productos finitos de Riemann es como sigue: Si $P = \{a = s_0, s_1, \ldots, s_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, sea $\Delta s_k := s_k - s_{k-1}$ para $k = 1, \ldots, n$. Sea $\mu(P)$ la malla de la partición P (longitud máxima de sus subintervalos). Una definición de la integral multiplicativa es

$$\widehat{\int_a^b} [I_n + A(t)\,\mathrm{d}t] := \lim_{\mu(P)\to 0} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{A(s_k)\Delta s_k}.$$

Si A es una función matricial cuyos valores conmutan dos a dos, i.e, para todos $t_1, t_2 \in [a, b]$ se tiene que

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1),$$

se puede probar que

$$\widehat{\int_a^b} [I_n + A(t)\,\mathrm{d}t] = \exp\left(\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Por estas y otras razones en el libro de Dollard y Friedman de 1979 [4, pág.

6] se denota la integral multiplicativa de A entre a y b por

$$\prod_a^b \mathrm{e}^{A(t)\,\mathrm{d}t}.$$

en vez de (3).

Es claro que la integral ordinaria es la integral “aditiva”, en la que se define la integral como límite de las “sumas” de Riemann. Hay más información en el documento La Integral Multiplicativa.

Claro que hay ejemplos harto elocuentes sobre el frenazo impuesto por ciertas notaciones: ¿cómo se pueden multiplicar 723.446 por 8.789 en números romanos? No es extraño que el álgebra no prosperara hasta la introducción de las cifras indoarábigas, ni que los antiguos griegos desarrollaran más la geometría que ninguna otra parte de las matemáticas.

5. Leibniz y la enseñanza

Las notaciones de Leibniz para el cálculo infinitesimal han sido de suma utilidad en la enseñanza del Cálculo Infinitesimal. Cuántas veces no hemos sido guiados por su poder mnemotécnico que nos facilitaba en extremo los cálculos. Incluso hemos visto a muchos estudiantes para los que el Cálculo es una “sopa de letras”, llevar a cabo difíciles ejercicios de derivar o integrar funciones, de hacer cambios de variables, sin tener ni idea de lo que estaban haciendo. Con la notación de Newton ($\dot{x}$ en vez de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$) no hubiera sido tan fácil. El raro mérito de Leibniz fue que en la derivada

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

de x respecto de t, este signo significa a la vez el signo de esta derivada y el cociente de las diferenciales $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}t$. Así pues,

$$\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t.$$

esto permitía calcular la derivada de función de función

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \text{regla de la cadena,}$$

siendo correcto interpretar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

tanto como el producto de las derivadas $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, como el resultado de multiplicar el numerador y el denominador de la fracción

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

por la diferencial de x, $\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}.$$

La derivada de la función inversa $x(y)$ de la función $y(x)$ se obtenía sin más de la identidad

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1;$$

a saber,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Las ecuaciones de Newton (2)

$$\text{(i)}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

al multiplicarlas por $\mathrm{d}t$, se transformarían en

$$\text{(i)}\quad \mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)}\quad \mathrm{d}y = f(y)\mathrm{d}x$$

o

$$\text{(i)}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \qquad \text{(ii)}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y);$$

Como x e y eran fluentes que dependían de t: $x = x(t), y = y(t)$, y considerando el fluente $t = t(x)$, inverso de $x(t)$, obtendríamos por sustitución y abusando de la notación que y sería un “fluente” dependiente de x: $y(x)$. Hemos abusado de la notación pues hemos llamado a funciones distintas con el mismo nombre.

Otro ejemplo de la utilidad de la notación de Leibniz es que facilita el uso de los cambios de variables en las integrales

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x,$$

pues por definición $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$.

Es bien sabido que una función, digamos f, es diferente de su valor $f(x)$ en un punto x. Por ello, cuando se quiso poner énfasis en este aspecto se escribió la integral definida de f entre los extremos a y b así

$$\int_a^b f. \tag{4}$$

Pero, intentando que la enseñanza llegue a los estudiantes actuales, hay que jugar con la ambigüedad de $f(x)$ para denotar, a la vez, el valor de f en x y la función f. Por lo que, unido a las anteriores razones, convendrá escribir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

en vez de (4).

6. El exceso bourbakista

Debemos señalar el peligro de un exceso de formalización matemática. Recordemos con horror el canon bourbakista: ... por (12.5.23.3) y (21.2.2) se sigue (33.4.5.8) ..., el objeto $(\mathcal{L}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{T}_1)$ es un subobjeto de $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{T})$ ..., que tanto nos hizo padecer aunque en su momento nos encantara frente al "desorden" anterior. Por cierto, la notación de pares, ternas, etc. ordenados para denotar grupos, anillos, espacios vectoriales, etc. fue introducida por Bertrand Russell.

Con todo, siempre habrá un antes y un después de los libros de Nicolás Bourbaki, y las cosas ya nunca serán como antes; esto todo matemático lo tiene claro. Pero que la enseñanza de las matemáticas deba seguir sus notaciones, eso ya es otro asunto. Aunque sabemos que la preocupación por escribir textos claros de Cálculo Infinitesimal en Francia dio lugar a la aparición de los libros de Bourbaki. Ya no se admitirían expresiones del tipo "dos curvas tienen un contacto de orden 4 en un punto P si tienen en P cinco puntos confundidos (sic)".

Referencias

[1] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique*, volume Livre I: Théorie de Ensembles, Chaps. 1 et 2. Hermann, París, 1966. 8, 10

[2] F. Cajori. *A History of Mathematical Notations*. Dover, (1928, 1929), 1993. En la Red el 12 de septiembre de 2001 en la página Web http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Cajori.html. 11

[3] J. A. da Cunha. *Principios Mathematicos*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 1987. Reproducción en facsímil de la edición publicada en Lisboa en 1790. Editada por J. Fernandes de Carvalho, M. Serra de Oliveira y J. Queiró. 18

[4] J. D. Dollard and C.-N. Friedman. *Product Integration*. Addison-Wesley, 1979. 20

[5] F. R. Gantmacher. *Théorie des Matrices*, volume 2. Dunod, Paris, 1966. Traduit par Ch. Sarthou. 19

[6] R. Godement. *Cours D'algèbre*. Hermann, París, deuxième edition, 1966. 8

[7] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover, 1956, 1926. 18

[8] M. Kline, editor. *Matemáticas en el Mundo Moderno*. Editorial Blume, Madrid, 1974. Versión castellana: Miguel de Guzmán. 4, 16

[9] S. Levin. *Estructuras Lingüísticas en la Poesía*. Cátedra, Madrid, 1991. 3

[10] J. L. Massera and J. J. Schäffer. *Linear Differential Equations and Function Spaces*. Academic Press, New York, 1966. 7

[11] J. Miller. Earliest uses of various mathematical symbols. En la Red el 31 de agosto de 2001 en http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html. 11

[12] V. Volterra and B. Hostinsky. *Operations Infinitesimales Lineaires*. Publicado en Paris, 1938. 19

[13] D. Zeilberger. La astrología combinatoria del rabino Abraham Ibn Ezra. *La Gaceta de la RSME*, 1(3):382–385, 1998. 11

Sobre este documento

Este artículo ha sido escrito en LaTeX con ayuda del paquete web, escrito por D.P. Story. Véase http://www.math.uakron.edu/~dpstory/acrotex.html. Después el fichero fuente xyz.tex ha sido compilado con pdflatex.