Universidad del País Vasco
Matemática Aplicada y Estadística

Informe sobre pseudoespectros

Juan-Miguel Gracia

Extracto: Intentaremos presentar un informe sobre los hechos que han sido demostrados sobre los pseudoespectros; algunas conjeturas y varias incertidumbres.

mepgrmej@vc.ehu.es
14 de mayo de 2004

Versión preliminar

Índice General

1. Introducción

Utilizamos la norma espectral de matrices y la distancia a ella asociada. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\varepsilon > 0$. Se llama ε-pseudoespectro de A al conjunto

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \bigcup_{\|A'-A\|\leq\varepsilon} \Lambda(A');$$

y se llama ε-pseudoespectro estricto al conjunto

$$\Lambda'_\varepsilon(A) := \bigcup_{\|A'-A\|<\varepsilon} \Lambda(A').$$

2. Funciones de Malyshev

En lo que sigue van a ser importantes las curvas de nivel de varias funciones reales definidas en el plano x, y; estas funciones son

$$
\begin{aligned}
h_1(x,y) &:= \sigma_n(zI - A),\\
h_2(x,y) &:= \max_{t\geq 0} \sigma_{2n-1} \begin{pmatrix} zI - A & tI \\ & zI - A \end{pmatrix},\\
h_{31}(x,y) &:= \max_{t\geq 0} \sigma_{3n-2} \begin{pmatrix} zI - A & tI & 0 \\ 0 & zI - A & tI \\ 0 & 0 & zI - A \end{pmatrix},\\
h_{32}(x,y) &:= \max_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2} \sigma_{3n-2} \begin{pmatrix} zI - A & t_1 I & 0 \\ 0 & zI - A & t_2 I \\ 0 & 0 & zI - A \end{pmatrix},\\
h_{33}(x,y) &:= \max_{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3} \sigma_{3n-2} \begin{pmatrix} zI - A & t_1 I & t_3 I \\ 0 & zI - A & t_2 I \\ 0 & 0 & zI - A \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

siendo $z := x + y\mathrm{i}$,

3. Hechos conocidos

- $\Lambda_\varepsilon(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon h_1(x, y) \leq \varepsilon\}$.
- Si los valores propios de A son simples,
  - la distancia desde A a la matriz más próxima con algún valor propio de multiplicidad ≥ 2, $d_2(A)$ viene dada por [2],
  $$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} h_2(x, y);$$
  - si $\varepsilon_0 > 0$ es el mínimo valor se ε para el cual se funden (coalescen) dos componentes conexas del pseudoespectro, entonces $\varepsilon_0 = d_2(A)$; véase [1].

Referencias

[1] R. Alam and S. Bora. On sensitivity of eigenvalues and eigendecompositions of matrices. *Linear Algebra Appl.*, xx:xxx–xxx, 2004. `http://www.ma.man.ac.uk/ ralam/`. 5

[2] A.-N. Malyshev. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues. *Numer. Math.*, 83(3): 443–454, 1999. 5