Condición de un valor propio múltiple y pseudoespectros

Juan-Miguel Gracia

5 de noviembre de 2004

Extracto

Intentamos armonizar las diversas definiciones de número de condición de un valor propio.

Índice

1. Condición de un v.p. simple.

2. Condición de un v.p. múltiple.

3. Estructura de Jordan y condición.

Condición de un v. p. simple

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda_j,$

$x, y \in \mathbb{C}^{n\times 1}, \|x\| = 1, \|y\| = 1,$

$Ax = \lambda_j x, \quad y^* A = \lambda_j y^*$

$$\boxed{\mathrm{c}(\lambda_j) := \frac{1}{|y^* x|}}$$

P_j :=proyector espectral de Riesz asoc. a λ_j,

$P_j = \frac{xy^*}{y^*x}$,

$\mathrm{c}(\lambda_j) = \|P_j\|$; **esta fórmula última es cierta aunque λ_j sea múltiple.** Falso: Sólo es verdadera si λ_j es semisimple.

Condición de un v.p. simple

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, λ_j simple $\Rightarrow \exists B(0) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ y una función diferenciable $f_j : B(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ t.q. $f_j(0) = \lambda_j$ y $\forall E \in B(0)$ el número $\hat{\lambda}_j := f_j(E)$ es un v.p. simple de $A + E$.

Además,

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j + y^* E x / y^* x + O(\|E\|^2), \quad (1)$$

cuando $E \longrightarrow 0$.

$$c(\lambda_j) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \sup\{|\hat{\lambda}_j - \lambda_j| : \|E\| \leq \varepsilon\}$$

(1) $\Rightarrow$

$$c(\lambda_j) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \sup\{|y^* E x| / |y^* x| : \|E\| \leq \varepsilon\}$$
$$= 1/|y^* x| \cdot \sup\{|y^* E x| : \|E\| = 1\}$$

$c(\lambda_j) \leq 1/|y^* x|$; si $E := y x^*$,
$c(\lambda_j) = 1/|y^* x|$

Condición de un v.p. múltiple

Ahora sea λ_j un v.p. de multiplicidad m.

$$\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A') :=$$

$$\min\{\rho \geq 0 \mid \text{ el disco cerrado } \mathcal{D}(\lambda_j, \rho)$$

contiene al menos m valores propios de $A'\}$.

Sea $\omega > 0$,

$$\mathrm{c}_\omega(\lambda_j) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\substack{0 \neq E \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|E\| \leq \varepsilon}} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega}.$$

Continuará ...

Referencias

[1] M. Karow: *Geometry of spectral value sets*, Tesis Doctoral, Universität Bremen, 2003.

[2] J. Brandts: On eigenvalues, pseudo-eigenvalues, singular values, and perturbation theory, `http://staff.science.una.nl/~brandts`, March 15, 2004.

[3] R. Byers, D. Kressner: On the condition of a complex eigenvalue under real perturbations, *BIT*, Vol. **43**, no. 1 (2003)1–18.

Fin

Realizado en LaTeX con el programa Utopia.