Condición de un valor propio múltiple y pseudoespectros

Juan-Miguel Gracia

17 de diciembre de 2004

Extracto

Si λ_j es un valor propio simple de A, al perturbar ligeramente A, la evolución del valor propio λ_j se puede describir por medio de una función *diferenciable*.
Cuando λ_j es un valor propio múltiple, no disponemos de esta función diferenciable, en principio.

Índice

- Introducción
- Condición de una función.
- Condición de un valor propio múltiple.
- Forma canónica de Jordan y condición.

Introducción

- Si λ_j es un valor propio simple de A, al perturbar ligeramente A, la evolución del valor propio λ_j se puede describir por medio de una función *diferenciable*; este hecho permite demostrar con facilidad formulaciones equivalentes más simples del número de condición de λ_j.

- Cuando λ_j es un valor propio múltiple, no disponemos de esta función diferenciable; por lo que el camino de encontrar expresiones equivalentes más simples del límite que define el número de condición, se torna más complicado. Aquí expondremos resultados que hacen hincapié en los pseudoespectros.

- Una opción alternativa podría ser el estudio del promedio de los valores propios perturbados que circundan a λ_j. Esto nos proporciona una función diferenciable. Esta opción no la exponemos.

Condición de una función

X, Y espacios de Banach; $U \subset X, x_0 \in U$ pto. de acumulación de U; $g : U \to Y$ una función.

Definición.- El número de condición de orden $\omega > 0$ de la función g en el punto x_0 está

definido por

$$\mathrm{c}_\omega(g, x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in \overline{B}'(x_0,\varepsilon) \cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^\omega}$$

definido por

$$\mathrm{c}_\omega(g, x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in \overline{B}'(x_0, \varepsilon) \cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^\omega}$$

Observaciones.-

- $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) \in [0, \infty]$ está bien definido para todo $\omega > 0$.

definido por

$$\mathrm{c}_\omega(g, x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in \overline{B}'(x_0, \varepsilon) \cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^\omega}$$

Observaciones.-

- $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) \in [0, \infty]$ está bien definido para todo $\omega > 0$.
- $0 \neq \mathrm{c}_\omega(g, x_0) \neq \infty$ para un $\omega > 0$ a lo más.

- Si g es discontinua en x_0, entonces $\forall \omega > 0$, $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) = \infty$.

- Si g es discontinua en x_0, entonces $\forall \omega > 0$, $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) = \infty$.
- Si g es constante en un entorno de x_0, entonces $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) = 0$.

- Si g es discontinua en x_0, entonces $\forall \omega > 0$, $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) = \infty$.
- Si g es constante en un entorno de x_0, entonces $\mathrm{c}_\omega(g, x_0) = 0$.

Demostramos a continuación que

$$\#\{\omega > 0 \mid 0 \neq \mathrm{c}_\omega(g, x_0) \neq \infty\} \leq 1.$$

Si ω_0 es t.q. $0 < \mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) < \infty, \Longrightarrow$

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall \varepsilon \in (0, \delta],$$

$$\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) - \eta < \sup_{x \in \overline{B}'(x_0, \varepsilon) \cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_0}}$$

$$< \mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta], \forall x \in \overline{B}'(x_0, \varepsilon) \cap U,$$

$$\frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_0}} < \mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta; \quad \Longrightarrow$$

Si $\omega_1 < \omega_0$,

$$\frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_1}} =$$

$$\frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_0}} \cdot \frac{1}{\|x - x_0\|^{\omega_1 - \omega_0}}$$

$$< \frac{\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta}{\|x - x_0\|^{\omega_1 - \omega_0}}$$

$$= \left(\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta \right) \|x - x_0\|^{\omega_0 - \omega_1}; \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{x \in \overline{B}'(x_0,\varepsilon)\cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_1}}$$

$$\leq \sup_{x \in \overline{B}'(x_0,\varepsilon)\cap U} \left(\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta\right)\|x - x_0\|^{\omega_0 - \omega_1}$$

$$\leq \left(\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta\right)\varepsilon^{\omega_0 - \omega_1}; \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sup_{x \in \overline{B}'(x_0, \varepsilon) \cap U} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|^{\omega_1}} \right)$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) + \eta \right) \varepsilon^{\omega_0 - \omega_1} = 0; \quad \Longrightarrow$$

(1)

$$\mathrm{c}_{\omega_1}(g, x_0) = 0. \quad //$$

Si hubiera un ω_2 t.q. $\omega_0 < \omega_2$ y

$$0 \neq \mathrm{c}_{\omega_2}(g, x_0) \neq \infty,$$

aplicando a ω_2 el razonamiento anterior tendríamos que debería ser $c_{\omega_0}(g, x_0) = 0$, pero $0 \neq c_{\omega_0}(g, x_0)$; por tanto si

$\omega_0 < \omega_2 \quad \Longrightarrow$

$$c_{\omega_2}(g, x_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{ó} \\ \infty. \end{cases}$$

No puede ser $c_{\omega_2}(g, x_0) = 0$, pues (1) con

$\omega_0 = \omega_2$ implicaría que $\mathrm{c}_{\omega_0}(g, x_0) = 0$. En consecuencia,

$$\mathrm{c}_{\omega_2}(g, x_0) = \infty. \quad //$$

Condición de un v.p. múltiple

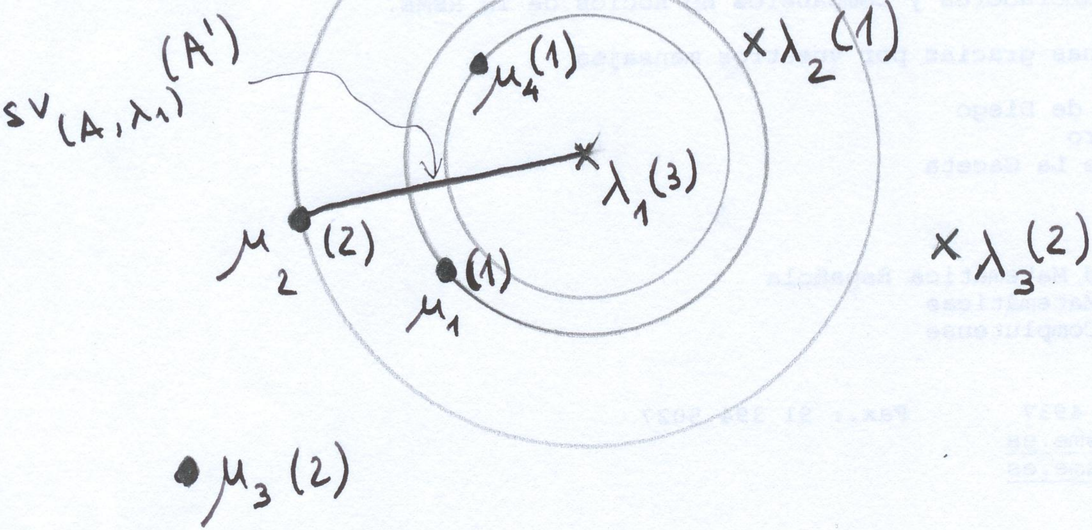
Ahora sea λ_j un v.p. de multiplicidad m.

Variación espectral de A' respecto de λ_j

$$\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A') :=$$

$$\min\{\rho \geq 0 \mid \text{ el disco cerrado } \mathcal{D}(\lambda_j, \rho)$$

contiene al menos m valores propios de $A'\}$.



$$m(\lambda_1, A) = 3$$

$$sv_{(A,\lambda_1)}(A') = \min\{\rho \geq 0 \;:\; D(\lambda_1,\rho) \text{ contiene al menos } 3 \text{ valores propios de } A'\}$$

Sea $\omega > 0$,

$$\mathrm{c}_\omega(\lambda_j) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\substack{0 \neq E \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ \|E\| \leq \varepsilon}} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega}.$$

Sea $\omega > 0$,

$$\mathrm{c}_\omega(\lambda_j) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\substack{0 \neq E \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ \|E\| \leq \varepsilon}} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega}.$$

Definiendo

$$\begin{aligned} g\colon (\mathbb{C}^{n\times n}, \|\cdot\|) &\rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ E &\mapsto \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E), \end{aligned}$$

se tiene $\mathrm{c}_\omega(\lambda_j) = \mathrm{c}_\omega(g, 0)$.

Recordemos

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \bigcup_{\|E\| \le \varepsilon} \Lambda(A+E)$$

$$\Lambda'_\varepsilon(A) := \bigcup_{\|E\| < \varepsilon} \Lambda(A+E)$$

Proposición 1.-

- $\Lambda'_\varepsilon(A)$ es abierto,
- $\Lambda_\varepsilon(A)$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN.

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(zI - A) \le \varepsilon\},$$

$$\Lambda'_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(zI - A) < \varepsilon\},$$

$z \mapsto \sigma_n(zI - A)$ es función continua.

Proposición 2.- Sea $s_0 \in \partial\Lambda_\varepsilon(A)$, entonces $\exists E_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\|E_0\| = \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A + E_0)$, y $\forall E$ t.q. $\|E\| < \varepsilon$ se tiene $s_0 \notin \Lambda(A + E)$.

Proposición 2.- Sea $s_0 \in \partial\Lambda_\varepsilon(A)$, entonces $\exists E_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\|E_0\| = \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A+E_0)$, y $\forall E$ t.q. $\|E\| < \varepsilon$ se tiene $s_0 \notin \Lambda(A+E)$.

Demostración. Como $\Lambda_\varepsilon(A)$ es cerrado, $\partial\Lambda_\varepsilon(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A)$.

Proposición 2.- Sea $s_0 \in \partial\Lambda_\varepsilon(A)$, entonces $\exists E_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\|E_0\| = \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A + E_0)$, y $\forall E$ t.q. $\|E\| < \varepsilon$ se tiene $s_0 \notin \Lambda(A + E)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\Lambda_\varepsilon(A)$ es cerrado, $\partial\Lambda_\varepsilon(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A)$. Así pues, como $s_0 \in \Lambda_\varepsilon(A)$ existe E_0 con $\|E_0\| \leq \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A + E_0)$.

Proposición 2.- Sea $s_0 \in \partial\Lambda_\varepsilon(A)$, entonces $\exists E_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\|E_0\| = \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A+E_0)$, y $\forall E$ t.q. $\|E\| < \varepsilon$ se tiene $s_0 \notin \Lambda(A+E)$.

Demostración. Como $\Lambda_\varepsilon(A)$ es cerrado, $\partial\Lambda_\varepsilon(A) \subset \Lambda_\varepsilon(A)$. Así pues, como $s_0 \in \Lambda_\varepsilon(A)$ existe E_0 con $\|E_0\| \leq \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A+E_0)$.No puede ser que $\|E_0\| < \varepsilon$; pues en tal caso, $s_0 \in \Lambda'_\varepsilon(A)$.

Por lo que s_0 sería punto interior de $\Lambda_\varepsilon(A)$ y no podría pertenecer a su frontera. $\square$

Por lo que s_0 sería punto interior de $\Lambda_\varepsilon(A)$ y no podría pertenecer a su frontera. $\square$

Proposición 3.- Sean $\varepsilon > 0$ y K una componente conexa de $\Lambda_\varepsilon(A)$. Entonces para toda $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t. q. $\|E\| \leq \varepsilon$,

$$\sum_{\mu\in\Lambda(A+E)\cap K} \mathrm{m}(\mu, A+E) = \sum_{\alpha\in\Lambda(A)\cap K} \mathrm{m}(\alpha, A).$$

La demostración puede verse en [1].

Variación espectral respecto a λ_j y al nivel de perturbación ε

$$\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) := \max_{\|E\| \leq \varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)$$

Variación espectral respecto a λ_j y al nivel de perturbación ε

$$\operatorname{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) := \max_{\|E\| \leq \varepsilon} \operatorname{sv}_{(A, \lambda_j)}(A + E)$$

Proposición 4.- $\mathcal{K}_j(\varepsilon)$ componente conexa de $\Lambda_\varepsilon(A)$.

- Si $\varepsilon > 0$ es t.q. $\mathcal{K}_j(\varepsilon) \cap \Lambda(A) = \{\lambda_j\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) &= \max_{\lambda \in \partial \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j| \\ &= \max_{\|E\|=\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) &= \max_{\lambda \in \partial \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j| \\ &= \max_{\|E\|=\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E),\end{aligned}$$

- Sea $\omega > 0$. Si existe el límite

$$c := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon)}{\varepsilon^\omega}; \Rightarrow c = \mathrm{c}_\omega(\lambda_j).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $E_1, \|E_1\| \leq \varepsilon$ t. q.

$$\max_{\|E\|\leq\varepsilon} \operatorname{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E) = \operatorname{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E_1)$$

Por la Proposición 3 la suposición $\mathcal{K}_j(\varepsilon) \cap \Lambda(A) = \{\lambda_j\}$ implica que $A + E_1$ tiene exactamente m valores propios en $\mathcal{K}_j(\varepsilon)$, contando multiplicidades, donde

$m = \mathrm{m}(\lambda_j, A). \Rightarrow$

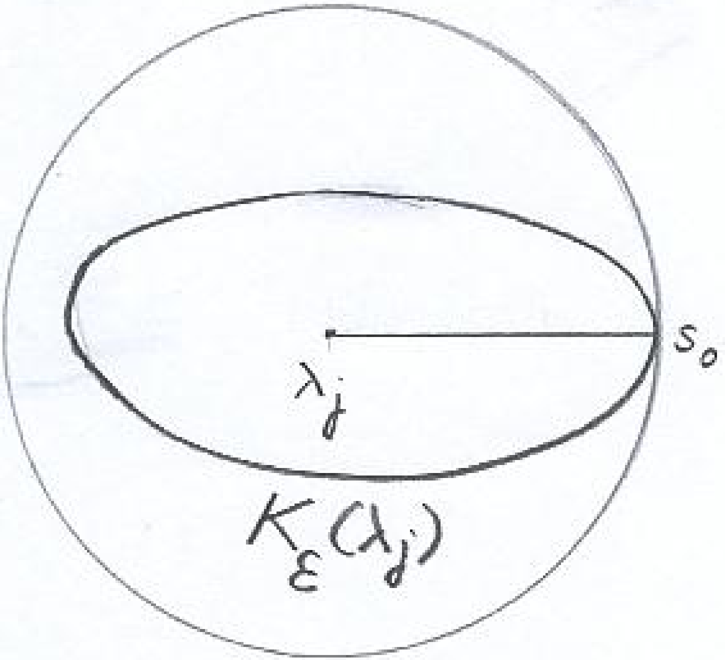
$$\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) \leq \max_{\lambda \in \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|$$

$$= \max_{\lambda \in \partial\mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|. \quad (2)$$

Sea $s_0 \in \partial\mathcal{K}_j(\varepsilon)$ tal que

$$|s_0 - \lambda_j| = \max_{\lambda \in \partial\mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|.$$

Entonces por la Proposición 2 existe una matriz E_ε con $\|E_\varepsilon\| = \varepsilon$ t. q. $s_0 \in \Lambda(A + E_\varepsilon)$. La matriz $A + E_\varepsilon$ tiene m valores propios en $\mathcal{K}_j(\varepsilon)$ contando las multiplicidades (uno de ellos es s_0, que puede ser múltiple o no). Por tanto,


s_0
λ_j
$K_\varepsilon(\lambda_j)$

$$\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E_\varepsilon) = |s_0 - \lambda_j|; \Rightarrow$$

$$\max_{\|E\|\leq\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E) \geq |s_0 - \lambda_j|; \Rightarrow$$

$$\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) \geq |s_0 - \lambda_j| \quad (3)$$

Por (2) y (3),

$$\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) = |s_0 - \lambda_j| = \max_{\lambda\in\partial\mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|.$$

Para demostrar la igualdad que queda de la parte primera, observemos que

$$\max_{\|E\|=\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E) \geq |s_0-\lambda_j| = \mathrm{sv}(A,\lambda_j,\varepsilon); \tag{4}$$

por otra parte, como

$$\{E \in \mathbb{C}^{n\times n} : \|E\| = \varepsilon\} \subset \{E \in \mathbb{C}^{n\times n} : \|E\| \leq \varepsilon\}$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{\|E\|=\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E) \leq \max_{\|E\|\leq\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)$$

$$= \mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon), \quad (5)$$

por (4) y (5),

$$\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon) = \max_{\|E\|=\varepsilon} \mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A + E).$$

A continuación probaremos la segunda parte de la Proposición. Supongamos que existe el límite

$$c := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon)}{\varepsilon^\omega}.$$

Para todo $\eta > 0$ existe un $\varepsilon_0 > 0$ t. q. para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\left| \frac{\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon)}{\varepsilon^\omega} - c \right| \leq \eta$$

y $\mathcal{K}_j(\varepsilon) \cap \Lambda(A) = \{\lambda_j\}$. Entonces para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ la matriz E_ε definida en la demostración de la parte primera satisface

$$c - \eta \leq \frac{\mathrm{sv}(A, \lambda_j, \varepsilon)}{\varepsilon^\omega} = \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E_\varepsilon)}{\|E_\varepsilon\|^\omega}.$$

Así pues,

$$c - \eta \leq \max_{\|E\| \leq \varepsilon} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega} \qquad (6)$$

Por otra parte, para toda E t. q. $\|E\| \leq \varepsilon$

tenemos

$$\frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega} \leq \frac{\mathrm{sv}(A,\lambda_j,\|E\|)}{\|E\|^\omega} \leq c+\eta.$$

Y de aquí,

$$\max_{\|E\|\leq\varepsilon} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^\omega} \leq c+\eta. \qquad (7)$$

Las desigualdades (6) y (7) implican que

$$c = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\|E\| \leq \varepsilon} \frac{\mathrm{sv}_{(A,\lambda_j)}(A+E)}{\|E\|^{\omega}}.$$

$\square$

Forma de Jordan y condición.

Descomposición de Jordan

$$A = \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j P_j + N_j)$$

$\Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, P_j es el proyector espectral de λ_j, i.e. P_j es el proyector sobre el subespacio radical $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ paralelo al subespacio

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}(A) \dot{+} \cdots \dot{+} \widehat{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}_{\lambda_r}(A)$$

donde $\widehat{}$ denota ausencia del subespacio cubierto.

subespacio

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}(A) \dot{+} \cdots \dot{+} \widehat{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}_{\lambda_r}(A)$$

donde $\widehat{\ }$ denota ausencia del subespacio cubierto. La matriz

$$N_j := (A - \lambda_j I)P_j$$

se llama la matriz nilpotente propia de λ_j. Puede probarse (ver Lancaster-Tismenetsky, Chap. 9) que

$$P_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r} \frac{A-\lambda_k I}{\lambda_j-\lambda_k}, \qquad P_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda$$

donde Γ es una curva cerrada simple rectificable, orientada positivamente, que rodea a λ_j e $\mathrm{Int}(\Gamma) \cap \Lambda(A) = \{\lambda_j\}$.

Teorema 5.- $\nu_j := \nu(\lambda_j) =$ índice de λ_j.

Si $\nu_j = 1$ (i.e. $N_j = 0$) v.p. semisimple,

1.

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{\mathcal{K}_j(\varepsilon) - \lambda_j}{\varepsilon} = \mathcal{D}(0, \|P_j\|),$$

respecto a la distancia de Hausdorff.

2.

$$c_1(\lambda_j) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \max_{\lambda \in \partial \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|$$

3. $c_1(\lambda_j) = \|P_j\|.$

2.

$$\mathrm{c}_1(\lambda_j) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \max_{\lambda \in \partial \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|$$

3. $\mathrm{c}_1(\lambda_j) = \|P_j\|$.

Si $\nu_j > 1$ (i.e. $N_j \neq 0$) v.p. defectuoso,

4.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{K}_j(\varepsilon) - \lambda_j}{\varepsilon^{1/\nu_j}} = \mathcal{D}(0, \|N_j^{\nu_j - 1}\|^{1/\nu_j}),$$

respecto a la distancia de Hausdorff.

5.

$$\mathrm{c}_{1/\nu_j}(\lambda_j) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{1/\nu_j}} \max_{\lambda \in \partial \mathcal{K}_j(\varepsilon)} |\lambda - \lambda_j|$$

6. $\mathrm{c}_{1/\nu_j}(\lambda_j) = \|N_j^{\nu_j - 1}\|^{1/\nu_j}$.

Referencias

[1] J.M. Gracia: *Multiplicities of structured pseudoeigenvalues*, Preprint, 2004, `http://www.vc.ehu.es/campus/centros/farmacia/deptos-f/depme/gracia1.htm`

[2] M. Karow: *Geometry of spectral value sets*, Tesis Doctoral, Universität Bremen, 2003.

[3] P. Lancaster, M. Tismenetsky: *The theory of matrices with applications*, Academic Press, 1985.

Fin

Realizado en LaTeX con el programa Utopia.