Apéndice a “Número de condición y pseudoespectros”

Juan-Miguel Gracia

5 de noviembre de 2004

Índice

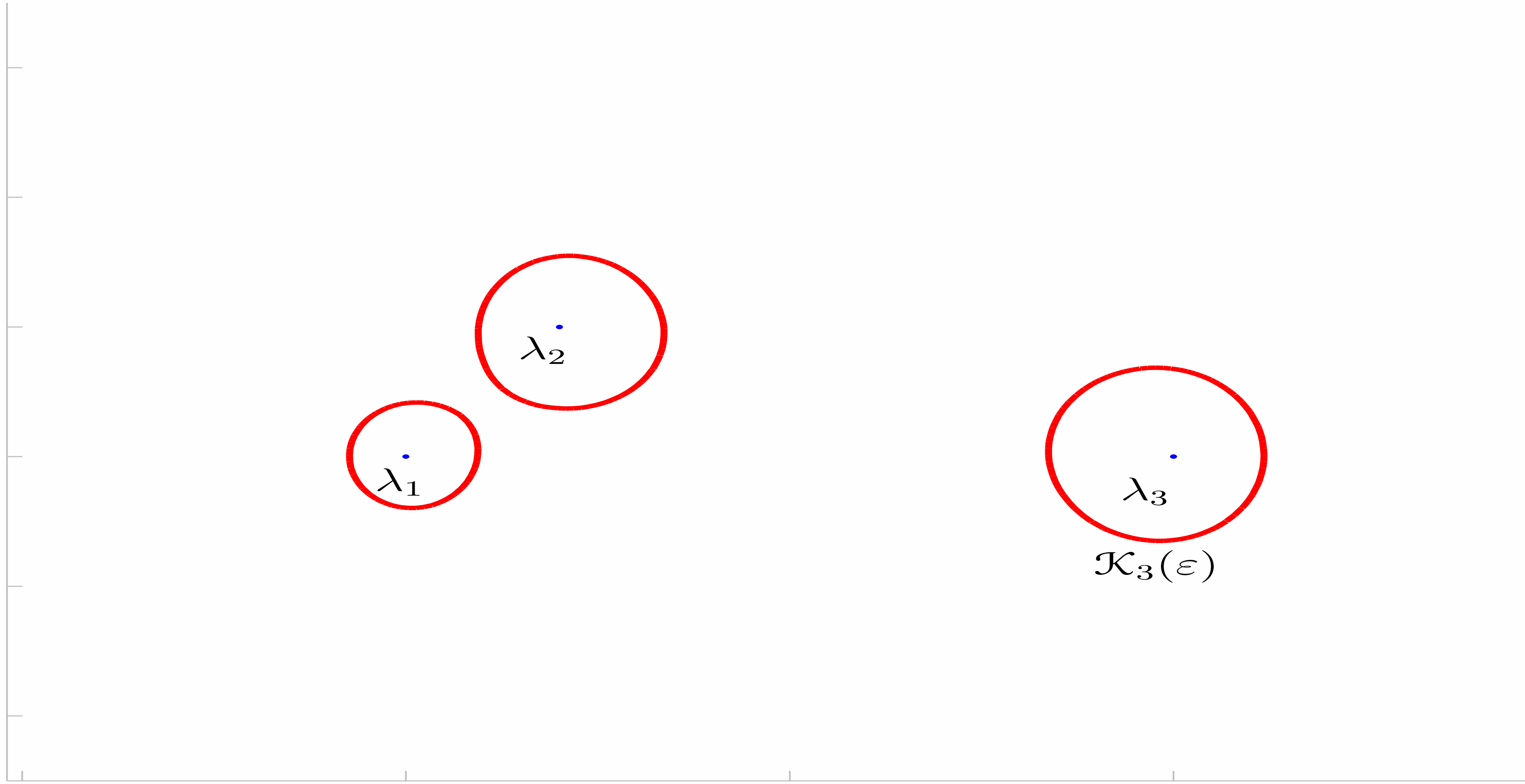
1. Área de una componente conexa

Área de una componente

Sea $\mathcal{K}_j(\varepsilon)$ la componente conexa de $\Lambda_\varepsilon(A)$ que contiene al v.p. λ_j de A;

$a_j(\varepsilon)$:= área de $\mathcal{K}_j(\varepsilon)$;

¿Relación entre las derivadas $a_j'(0^+), a_j''(0^+)$ y $\mathrm{c}(\lambda_j)$?


λ_2
λ_1
λ_3
$\mathcal{K}_3(\varepsilon)$

Área de una componente

Sea λ_j un v.p. simple de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$;

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2} \qquad (1)$$

Proposición 1.- *Existe $a_j'(0^+)$ y vale 0.*

DEMOSTRACIÓN. Por (1), $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q.

$0 < \varepsilon < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2 \right| < \eta, \Leftrightarrow$$

$$-\eta < \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2 < \eta, \Leftrightarrow$$

$$\pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2 - \eta < \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2 + \eta. \quad (2)$$

Multiplicando (2) por $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon\big(\pi\,\mathrm{c}(\lambda_j)^2 - \eta\big) < \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon} < \varepsilon\big(\pi\,\mathrm{c}(\lambda_j)^2 + \eta\big), \tag{3}$$

Haciendo tender $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ en (3), se obtiene

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0; \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{a_j(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Como $a_j(0) = 0$, (4) implica que existe $a_j'(0^+) = 0$. ■

Cota de perturbación clásica

Teorema 2.- (Bauer-Fike) *Supongamos que* $AV = VD$ *con* V *invertible y* D *diagonal. Sea* μ *un v.p. de* $A + E$*. Entonces existe un v.p.* λ_j *de* A *t.q.*

$$|\mu - \lambda_j| \leq \kappa(V)\|E\|,$$

donde $\kappa(V) := \|V\|\|V^{-1}\|$*.*

Corolario 3.- *Sea A una matriz normal, y μ un v.p. de $A+E$. Entonces existe un v.p. λ_j de A t.q.*

$$|\mu - \lambda_j| \leq \|E\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Existe U unitaria tal que

$$U^* A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$

y $\kappa(U) = 1$, pues $\sigma_1(U) = 1 = \sigma_n(U)$.■

Proposición 4.- $\forall A, \forall \varepsilon \geq 0$,

$$\bigcup_{\lambda_j \in \Lambda(A)} \overline{B}(\lambda_j, \varepsilon) \subset \Lambda_\varepsilon(A),$$

mientras que vale la igualdad si A es normal.

DEMOSTRACIÓN.

$z \in \overline{B}(\lambda_j, \varepsilon), E := (z - \lambda_j)I \Rightarrow$
$\|E\| = |z - \lambda_j| \leq \varepsilon$.

$zI - (A + E) = zI - (A + zI - \lambda_j I) =$
$\lambda_j I - A$;

$$z \in \Lambda(A + E) \Rightarrow z \in \Lambda_\varepsilon(A).$$

Si A es normal, el Corolario 3 prueba el recíproco.$\blacksquare$

A matriz normal

$$\delta_j(\varepsilon) = 2\varepsilon, \quad a_j(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2; \Longrightarrow$$

$$\delta_j'(\varepsilon) = 2, \quad a_j'(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon, \quad a_j''(\varepsilon) = 2\pi; \Rightarrow$$

$$\delta_j'(0^+) = 2, \quad a_j'(0^+) = 0, \quad a_j''(0^+) = 2\pi.$$

Conjetura 5.- *Para cualquier matriz A,*

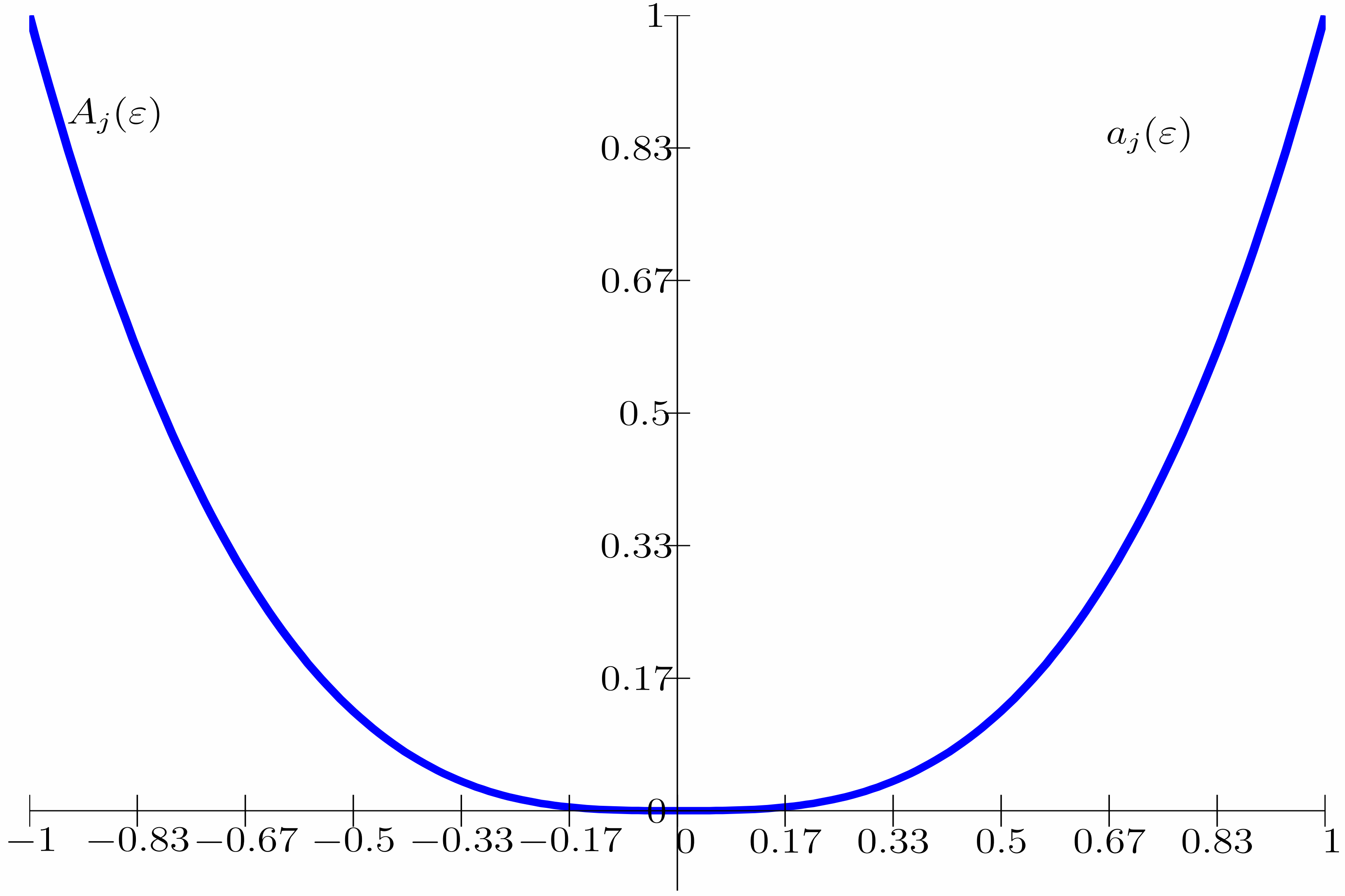
$$a_j''(0^+) = 2\pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2.$$

"DEMOSTRACIÓN. " Si existe $f''(x_0)$, entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

Sea

$$A_j(\varepsilon) = \begin{cases} a_j(\varepsilon) & \text{si } \varepsilon \geq 0, \\ a_j(-\varepsilon) & \text{si } \varepsilon < 0. \end{cases}$$


$A_j(\varepsilon)$
$a_j(\varepsilon)$
1
0.83
0.67
0.5
0.33
0.17
0
−1 −0.83 −0.67 −0.5 −0.33 −0.17 0 0.17 0.33 0.5 0.67 0.83 1

Si existiera $a_j''(0^+)$,

$$A_j''(0^+) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{A_j(\varepsilon) - 2A_j(0) + A_j(-\varepsilon)}{\varepsilon^2} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2a_j(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 2\pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2;$$

$$A_j''(0^-) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^-} \frac{A_j(\varepsilon) - 2A_j(0) + A_j(-\varepsilon)}{\varepsilon^2} =$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^-} \frac{2a_j(-\varepsilon)}{(-\varepsilon)^2} = \lim_{\beta \longrightarrow 0^+} \frac{2a_j(\beta)}{\beta^2} = 2\pi\,\mathrm{c}(\lambda_j)^2;$$

Por tanto,

$$\exists \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{A_j(\varepsilon) - 2A_j(0) + A_j(-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 2\pi\,\mathrm{c}(\lambda_j)^2;$$

y sería $A_j''(0) = 2\pi\,\mathrm{c}(\lambda_j)^2; \Rightarrow$

$$a_j''(0^+) = 2\pi\, \mathrm{c}(\lambda_j)^2.$$

“$\blacksquare$”

Referencias

[1] M. Karow: *Geometry of spectral value sets*, Tesis Doctoral, Universität Bremen, 2003.

[2] J. Brandts: On eigenvalues, pseudo-eigenvalues, singular values, and perturbation theory, `http://staff.science.una.nl/~brandts`, March 15, 2004.

Fin

Realizado en LaTeX con el programa Utopia.