

ESTATIKA

©Ugutz Garitaonaindia Antsoategi
Ingeniaritza Mekanikoa Saila
Gasteizko I.I.T. eta T.I.T.U.E.
Euskal Herriko Unibertsitatea

2000/2001 ikasturtea

Índice

1. DEFINIZIOA	3
2. LOTURA DUEN PUNTU MATERIALA	3
3. LOTURA ERREAKZIOEN PRINTZIPIOA	3
4. PUNTU MATERIALAREN OREKA	4
4.1. PUNTU ASKEAREN OREKA. AZTERKETA ANALITIKOA	4
4.2. GAINAZAL LEUN BATI LOTUTAKO PUNTU MATERIAL BATEN OREKA	5
4.3. LERRO LEUN BATI LOTUTAKO PUNTU MATERIAL BATEN OREKA	8
4.4. EGONKORTASUNA MARRUSKADURARIK GABEKO OREKAN . . .	9
5. MARRUSKADURA DUTEN LOTURAK	10
5.1. GAINAZAL ZIMUR BATI LOTUA DAGOEN PUNTU BATEN OREKA .	12
5.2. LERRO ZIMUR BATI LOTUA DAGOEN PUNTU BATEN OREKA . . .	14
5.3. MARRUSKADURADUN OREKAREN EGONKORTASUNA	14
6. SISTEMEN ESTATIKA	16
6.1. SISTEMA MATERIALEN SAILKAPENA	16
6.2. LOTUREN SAILKAPENA	16
6.3. ASKATASUN MAILA ETA KOORDENATU OROKORRAK	20
6.4. LOTURA SOILAK, BIKOITZAK ETA HIRUKOITZAK	22
6.4.1. LOTURA SOILAK	22
6.4.2. LOTURA BIKOITZAK	22
6.4.3. LOTURA HIRUKOITZAK	23
6.5. HIGIDURAREN ARABERAKO SISTEMEN SAILKAPENA	23

7. BARNE INDARREN TEOREMA	24
8. ESTATIKAREN EKUAZIO UNIBERTSALAK	25
9. SOLIDO ZURRUNAREN ESTATIKA	27
9.1. LOTURA DUEN SOLIDO ZURRUNAREN AZTERKETA ESTATIKOA .	28
9.1.1. PUNTU FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA	29
9.1.2. ARDATZ FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA	30
9.1.3. PLANO BATEAN BERMATUA DAGOEN SOLIDO ZURRUNA .	31
9.1.4. BI PLANOTAN BERMATUA DAGOEN SOLIDO ZURRUNA . .	34
9.1.5. PLANO BATEAN BERMATU ETA PUNTU FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA	34
10. GRAFOSTATIKA	36
10.1. POLIGONO FUNIKULARRA ETA INDARREN EDO VARIGNON-EN POLIGONOA	36
11. BERMAPUNTUETAKO ERREAKZIOEN EDO LOTURA INDARREN KALKU- LU GRAFIKOA	37
11.1. INDAR PARALELOEN SISTEMA	37
11.2. PARALELOAK EZ DIREN LOTURA INDARREN KALKULUA	38
11.3. ARDATZ POLARRA EDO CULLMAN-EN LERRO ZUZENA	40
12. SOLIDO FUNIKULARREN ESTATIKA. DEFINIZIOA	41
13. SOLIDO FUNIKULARREN OREKAREN EKUAZIO BEKTORIALA. KASU BEREZIA	41
14. KABLEAREN OREKAREN EKUAZIO CARTESIAR ETA INTRINTSEKOAK	43
15. KARGA BERTIKAL JARRAIA JASATEN DUEN KABLEA	44
16. KARGA BERTIKAL JARRAIA ETA ABSIZAREN UNITATEAREKIKO KON- STANTEA JASATEN DUEN KABLEA	46
16.1. ALTURA BERDINEAN DAUDEN BERMAPUNTUAK	46
16.2. ALTURA DESBERDINEAN DAUDEN BERMAPUNTUAK	49
17. KARGA BERTIKAL JARRAIA ETA KABLEAREN LUZERAREKIKO KON- STANTEA JASATEN DUEN KABLEA	53
17.1. ALTUERA BERDINEAN DAUDEN BI PUNTUREN ARTEKO KATENAR- IA	56
17.2. ALTUERA DESBERDINEAN DAUDEN BI PUNTUREN ARTEKO KATE- NARIA	59
18. LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA	60

1. DEFINIZIOA

Estatika, sistema materialen oreka aztertzen duen mekanikaren atala da, edo beste modu batean esanda, sistema material bat geldiuenean mantentzeko, aplikatuta dituen indarrek bete behar duten baldintzak aztertzen duen mekanikaren atala da.

2. LOTURA DUEN PUNTU MATERIALA

Puntu material baten higidura ez badago baldintzatuta ezein loturekin, puntua aske dagoela esaten da. Kasu honetan bere kokapena zehazteko hiru koordenatu eman behar dira. Honela, hiru askatasun maila dituela esaten da.

Puntu material batek bere higidura baldintzatua izaten badu, lotura duela esaten da, eta baldintza hau ezartzen duenari lokarria edo lotura deitzen zaio.

Adibide sinple bat, lerro batean egotera derrigortua dagoen puntu materiala izan daiteke. Kasu honetan bere kokapena parametro bakarrarekin zehaztu daiteke, adibidez, lerroaren gainean emandako koordenatu kurbilineoa. Ondorioz, puntu honek askatasun maila bat du.

Beste adibide bat, gainazal batean egotera derrigortua dagoen puntu materiala izan daiteke. Bere kokapena bi koordenatu kurbilineokin zehaztu daiteke, hau da, bi askatasun maila izan-gu du.

3. LOTURA ERREAKZIOEN PRINTZIOA

Bedi lotura jakin bat duen A puntu materiala. Puntu honek indar sistema bat jasaten du, non honen erresultantea \vec{F} den.

Puntu honek loturarenbat izaten badu, eta ondorioz bere higidura baldintzatua, \vec{F} indar-raren aplikazioaren ondorioz, ez du jasango askea izango balitz izango lukeen higidura berdina. Beraz, puntu materialak dituen loturak erreakzio indarreatatik ordezkatuak izan daitezke.

Arrazoi honengatik ondorioztatzen da lotura erreakzioen printzipioa:

Lotura jakin bat duen puntu materialak, indar sistema bat aplikatua izaten badu, loturen eragina erreakzio indar batzuentatik ordezkatu daiteke.

Erreakzio indar hauen oinarritzko ezaugarriak hurrengo hauek dira:

1. Aplikatutako indarren araberakoak dira, eta hauen modulua lotura idealetan mugagabea izan daiteke.
2. Aplikatutako indarrak anulatu egiten badira, erreakzio indarrak ere anulatu egingo dira.

3. Erreakzio indarrek berez ez dute higidurarik sortzen.

Puntu materialean aplikatutako indar sistemaren erresultantea \vec{F} izaten bada, eta \vec{R} lotura edo erreakzio indarra, dinamikaren oinarritzko ekuazioa honela espresatu daiteke:

$$\vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

Ekuazio honen bidez erreakzio indarra \vec{R} kalkulatu ahal izango dugu; aplikatutako indar-rak, puntuaren masa eta higidura legearen arabera.

4. PUNTU MATERIALAREN OREKA

Puntu material baten eragiten duten indarrak orekan daude, puntua geldinean mantentzen dutenean edo ez diotenean abiadura aldaketa eragiten.

Ondorioz, puntu materiala geldinean egongo da hurrengo baldintza betetzen denean:

$$\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

Puntu materiala askea izaten bada, hau da, ez badu inongo loturarik $\vec{R} = \vec{0}$ izango da, eta aurreko ekuazio honela geratzen zaigu:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Hau da, kasu honetan aplikatutako indarren erresultantea zero izan behar da.

Orain, puntu materialak lotura izaten badu $\vec{R} \neq \vec{0}$ izango da, eta ondorioz:

$$\vec{F} = -\vec{R}$$

Hau da, lotura duten puntu materialek orekan mantentzeko bete behar duten baldintza, aplikatutako indarren erresultantea eta lotura indarren erresultantea aurkakoak izatea da.

4.1. PUNTU ASKEAREN OREKA. AZTERKETA ANALITIKOA

Ikusi dugun bezala, kasu honetan puntu materiala orekan mantentzeko bete behar den baldintza, aplikatutako indarren erresultantea zero izatea da:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i + \cdots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Indar hauek erreferentzia sistemaren hiru norabide nagusietan deskonposatzen badira, eta hauetako edozein indarren osagaiak F_{xi} , F_{yi} eta F_{zi} bezala errepresentatzen baditugu:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{i=1}^{i=n} F_{xi} = 0 \\ F_y &= \sum_{i=1}^{i=n} F_{yi} = 0 \\ F_z &= \sum_{i=1}^{i=n} F_{zi} = 0 \end{aligned}$$

4.2. GAINAZAL LEUN BATI LOTUTAKO PUNTU MATERIAL BATEKIN OREKA

Puntu material batek gainazal batekin izan dezaken lotura bi motakoa izan daitekeela suposatuko dugu:

1. Bi aldetako lotura: Kasu honetan puntua derrigortuta dago une oro gainazalarekin kontaktuan egotera.
2. Alde bateko lotura: Kasu honetan aldiz, puntua gainazalak mugatzen dituen erdiespazio batean mugitu daiteke, gainazalarekin kontaktuan egon ala ez.

Jarraian bi lotura mota hauek aztertuko ditugu:

1. Bi aldetako lotura.

A puntuak ezin duenez izan higidurarik gainazalarekiko norabide normalean, puntu horretan gainazalarekiko norabide normala $\vec{\eta}$ duen erreakzio indarra sortuko da, erreakzio honek aplikatutako indarraren aurkako norantza izango duelarik. Beraz:

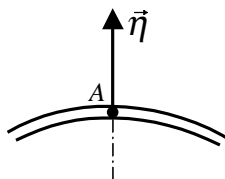


Figura 1: Gainazal batekiko bi aldeko lotura duen puntu materiala.

$\vec{F} \pm R \vec{\eta} = \vec{0}$, honek esan nahi du \vec{F} eta $\vec{\eta}$ lerrokideak izan behar dutela, ondorioz:

$$\vec{F} \wedge \vec{\eta} = \vec{0}$$

Hau da, gainazal batekiko bi aldeko lotura duen puntu bat orekan egongo da, aplikatutako indarren erresultanteak gainazalarekiko norabide normala duenean.

2. Alde bateko lotura.

Aplikatutako indarren erresultantea bi norabidetan deskonposatzen dugu: bata gainazalarekiko tangente eta bestea elkarzut.

Norabide tangentea duen osagaiak, puntua gainazaletik mugiarazten du, beraz puntua orekan mantentzeko osagai hau zero izan behar da.

Gainazalarekiko norabide normala duen osagaiak puntua mugitu ezin daitekeen erdiespazioarekiko bultzatu behar du. Honek esan nahi du aplikatutako indarraren osagai normalak, eta puntua mugitu daitekeen erdiespazioaren norabidea definitzen duen bektore normal unitarioak aurkako norantza izan behar dutela.

Bi baldintza hauek analitikoki honela adierazten dira:

$$\vec{F} \wedge \vec{\eta} = \vec{0} \quad \text{eta} \quad \vec{F} \cdot \vec{\eta} < 0$$

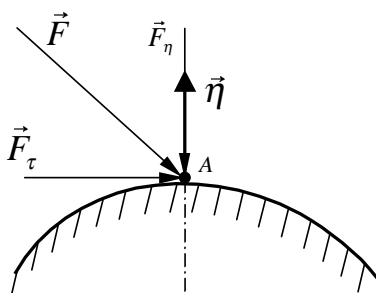


Figura 2: Gainazal batekiko alde bateko lotura duen puntu materiala.

Analitikoki hurrengo planteamendua egingo dugu. Lehengo \vec{F} indarra hiru norabide nagusietan deskonposatuko dugu:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \text{ non:}$$

$$F_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{xi} \quad ; \quad F_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{yi} \quad ; \quad F_z = \sum_{i=1}^{i=n} F_{zi}$$

Honela, gainazalaren ekuazio analitikoa modu honetan errepresentatzen bada $f(x, y, z) = 0$, gainazal honekiko une guztietan normala den bektore unitarioa:

$$\vec{\eta} = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Non γ_1 , γ_2 eta γ_3 parametroak $\vec{\eta}$ bektorearen kosinu zuzentzaileak diren, eta hauen balioa:

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta}$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta}$$

$$\gamma_3 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta}$$

Orain, \vec{R} eta $\vec{\eta}$ bektoreak lerrokideak izan behar dutenez, eta $\vec{\eta}$ unitarioa denez: $\vec{R} = R \cdot \vec{\eta}$.

$$\vec{R} = \frac{R}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{R}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{R}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \text{ eta } \frac{R}{\Delta} = \lambda \text{ eginez:}$$

$$\vec{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Jarraian, oreka baldintzak aplikatuz, $\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$:

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{k} = \vec{0}$$

Hau da, hiru ekuazio hauek:

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Eta $f(x, y, z) = 0$ ekuaziak, lau parametro ezezagunekin (λ, x, y, z) osatutako sistema bat egiten dute. Honela oreka kokapena kalkulatu daiteke $A(x, y, z)$ eta erreakzioen balioa λ kalkulatu ondoren.

4.3. LERRO LEUN BATI LOTUTAKO PUNTU MATERIAL BATEN OREKA

Kasu honetan oreka existitzeko aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} , lerro honen tangentearekiko elkarzut izan behar du, bestela, norabide tangenziala duen osagaiak puntua lerroan zehar desplazatuko lukeelako.

Lerroaren norabide tangentea definitzen duen bektore unitarioa $\vec{\tau}$ izaten bada, bete beharreko baldintza, $\vec{F} \cdot \vec{\tau} = 0$ da.

Jarraian azterketa analitikoa egingo dugu, honetarako lerroaren ekuazioa f_1 eta f_2 funtzioek definitzen duten azalaren elkargunea bezala ematen dela suposatzen badugu:

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ eta } f_2(x, y, z) = 0.$$

Kontuan izanda oreka baldintza $\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ dela, erreakzioen erresultantea η_1 eta η_2 osagaietan deskonposatuko dugu, hots, f_1 funtzioak definitutako S_1 azalerarekiko osagai normalean eta f_2 funtzioak definitutako S_2 azalerarekiko osagai normalean hurrenez hurren:

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \quad \text{non;} \quad \vec{R}_1 = R_1 \vec{\eta}_1 \quad \text{eta} \quad \vec{R}_2 = R_2 \vec{\eta}_2$$

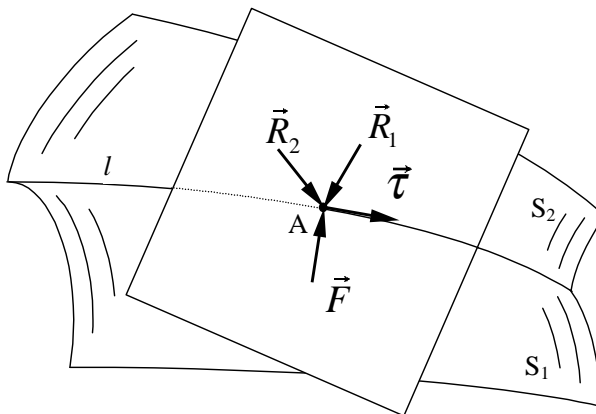


Figura 3: Lerro leun batekiko lotura duen puntu materiala.

Beraz, planteamendu orokorrean erreparatuz gero, aurreko atalean aztertutako gainazal baten orekaren antzeko kasua dela ikus dezakegu, kasu honetan gainazal batekiko izan beharrean, bi gainazalekiko delarik. Ondorioz, lerro leun honekiko planteatutako orekako bost ekuazioak:

$$F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

Kasu honetan bost parametro ezezagunekin ($\lambda_1, \lambda_2, x, y, z$) osatutako sistema planteatzen da, non $\lambda_1 = \frac{R_1}{\Delta_1}$ eta $\lambda_2 = \frac{R_2}{\Delta_2}$ nomenklatura erabiliz, \vec{R}_1 eta \vec{R}_2 osagaiak kalkulatu ahal dira, eta ondorioz, \vec{R} erreakzioen erresultantea.

4.4. EGONKORTASUNA MARRUSKADURARIK GABEKO OREKAN

Puntu bat oreka egonkorrean dagoela esaten da, bere oreka kokapenetik ds bat desplazatzen dugunean, puntuak hasierako kokapena berreskuratzeko joera duenean.

Aldiz, puntuak oreka kokapenetik hurruntzeko joera duenean, bere orekaren izaera eze-gonkorra dela esango genuke.

Azkenik, puntuak kokapen berrian pausagunean geratzeko joera izaten badu, oreka axo-lagabe baten aurrean egongo ginateke.

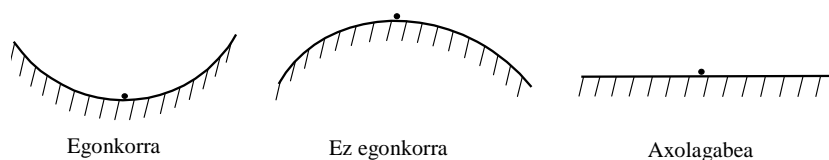


Figura 4: Oreka mota desberdinak.

Puntu materialean aplikatuta dauden indarren erresultantea konstantea denean edo puntuaren kokapen geometrikoaren arabera, oreka kokapenean duen osagai tangenziala F_τ zero da.

Honela, ΔS desplazamentu batentzat, osagai tangenzialak ΔF_τ balioa hartuko du.

Oreka egonkorra izaten bada $\frac{\Delta F_\tau}{\Delta S} < 0$; eta limitean $\frac{dF_\tau}{dS} < 0$.

Oreka ezegonkorra denean $\frac{\Delta F_\tau}{\Delta S} > 0$; eta limitean $\frac{dF_\tau}{dS} > 0$.

Eta oreka axolagabean $\frac{\Delta F_\tau}{\Delta S} = 0$; eta limitean $\frac{dF_\tau}{dS} = 0$.

5. MARRUSKADURA DUTEN LOTURAK

Orain arte ikusitako lotura guztiak leunak izan dira. Puntuak gainazal batekin lotua dagoenean sortzen diren erreakzioak, gainazalarekiko ortogonalak direla ikusi dugu. Era berean, puntu materiala lerro leun batekin lotua dagoenean, erreakzio indarra lerro honekiko elkarzut den planoan dagoela ikusi dugu.

Marruskadura duten loturetan, erreakzio indarra ez da gainazalarekiko normala, kasu hauetan osagai normala \vec{R}_η eta tangenziala \vec{R}_τ existituko da.

Ikus dezagun hurrengo adibide praktikoa:

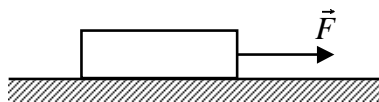


Figura 5: Marruskadura duen loturaren adibide praktikoa.

Bedi \vec{P} pisua duen gorputza. Gorputz hau puntu material batengatik ordezkatu dugu. Honela osatutako sistema plano horizontal batean dagoela suposatuko dugu, eta honi, \vec{F} indar horizontala aplikatuko diogu. Saiakuntzen bidez baieztatu dezakegu gorputz honek ez duela higidura hasiko \vec{F} indarrak balio limite bat gainditu ezean. Honek esan nahi du gorputza eta gainazalaren artean dagoen loturak, higidurari aurre egiten dion erreakzio tangenzial bat sortzen duela \vec{R}_τ . Erreakzio honen balioa $\vec{0}$ eta \vec{R}_τ^{lim} artean dago.

Laburtuz, puntu material batengatik ordezkatu dugun sistema materialak, oreka egoeran jasaten dituen indarrak hurrengo hauek izango dira:

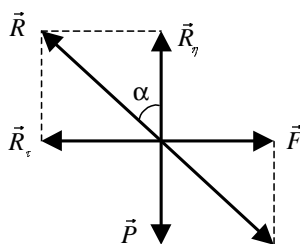


Figura 6: Marruskadura duen loturan eragiten duten indarrak.

- Aplikatutako indarrak: Pisua \vec{P} eta aplikatutako indarra \vec{F} .
- Erreakzio indarrak: indar normala $\vec{R}_\eta = R_\eta \vec{\eta}$, honen norabidea gainazalarekiko elkarzut da, eta indar tangenziala $\vec{R}_\tau = R_\tau \vec{\tau}$, edo marruskadura indarra, honen norabidea gainazalarekiko tangentea da, eta norantza, higiduraren aurkakoa.

Oreka egoeran hurrengo berdinketak betetzen dira: $\vec{R}_\tau = -\vec{F}$ eta $\vec{R}_\eta = -\vec{P}$

Carlos Agustin Coulomb-ek sakonki aztertu zuen marruskadura fenomeno fisikoa, eta marruskadura indarrentzat hurrengo legeak finkatu zituen:

1. Kontaktuan dauden gainazalen motaren arabera da, hau da; materiala, akabera edo gainazalaren zimurtasuna, lubrifikazio maila, eta abar.
2. Kontaktuko gainazalen azalerarekiko independentea da, eta baita higiduraren kasuan gainazal hauen artean dagoen abiadura erlatiboarekiko. Hala ere, marruskaduraren balioa aldatu egiten da pausagune egoeratik higidura egoerara pasatzen denean.
3. Pausagune egoeratik higidura egoerara pasatzen den unean, marruskadura indarraren balioa $\vec{R}_\tau lim$ izango da. Indar honen modulua, erreakzioko indar normalarekiko \vec{R}_η zuzenki proportzionala da.

$$\vec{R}_\tau lim = \mu_e \vec{R}_\eta, \quad \text{non; } 0 < \mu_e < 1$$

Honela, μ_e marruskadura estatikoaren koefizientea da, eta bere balioa:

$$\mu_e = \frac{\vec{R}_\tau lim}{\vec{R}_\eta} = \tan \varphi$$

Bestalde, μ_e parametroak, kono baten ardatzak bere sortzaileekiko osatzen duen angeluaren tangentea adierazten du. Konoaren ardatzak loturaren norabide normala du. Puntu materiala pausagunean mantenduko da, aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} eta ondorioz, loturako indar erresultantea $\vec{R} = \vec{R}_\eta + \vec{R}_\tau$, kono honen barnean mantentzen denean.

4. Egoera ez estatikoan, hau da, sistema materiala higiduran dagoenean, erreakzio tangentialaren \vec{R}_τ modulua:

$$\vec{R}_\tau = \mu_c \vec{R}_\eta, \quad \text{non; } 0 < \mu_c < 1$$

Kasu honetan μ_c marruskadura zinetikoaren modulua da. Koefiziente honekin ere, marruskadura estatikoaren modularekin gertatzen den bezala, gainazalaren arabera bere balioa aldatu egiten da.

Orokorrean $\mu_e > \mu_c$ izaten da.

Marruskaduraren inguruan Coulomb-ek egindako azterketen ondoren, Airn eta Petroff ikerlariek Coulombek egoera ez estatikoarentzat, hau da higidura egoerarentzat emandako legeak zuzendu zituzten, hurrengo legeak finkatuz:

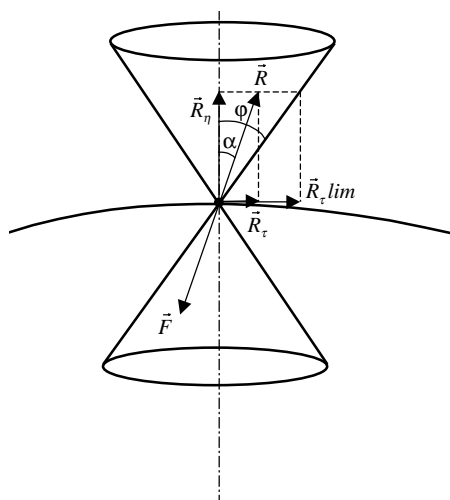


Figura 7: Marruskadura konoa.

1. Marruskadura indarra, bi gainazalen artean kontaktuan dagoen azalera eta hauen artea dagoen abiaduraren araberakoa da.
2. Marruskadura indarra, lubrifikazio geruzaren lodiera ertainarekiko alderantziz proportzionala da.
3. Marruskadura indarra, kontaktuan dauden azaleren artean dagoen presioaren erro karatuarekiko proportzionala da.

Diagrama batean, marruskadura indarraren balioa R_τ , eta aplikatutako indarraren osagai tangentialaren F_τ arabera irudikatu dezakegu:

5.1. GAINAZAL ZIMUR BATI LOTUA DAGOEN PUNTU BATEN OREKA

Bedi \vec{F} puntu batean aplikatutako indarren erresultantea eta \vec{R} loturako indarren erresultantea.

Hurrengo bi kasu hauek aintzat hartuko ditugu:

1. Bi aldetako lotura:

\vec{F} indarra gainazalarekiko norabide normal eta tangenzialean deskonposatuko dugu:

$$F_\eta = \vec{F} \cdot \cos \alpha \quad ; \quad F_\tau = \vec{F} \cdot \sin \alpha = F_\eta \cdot \tan \alpha$$

Oreka existitu dadin beharrezkoa da:

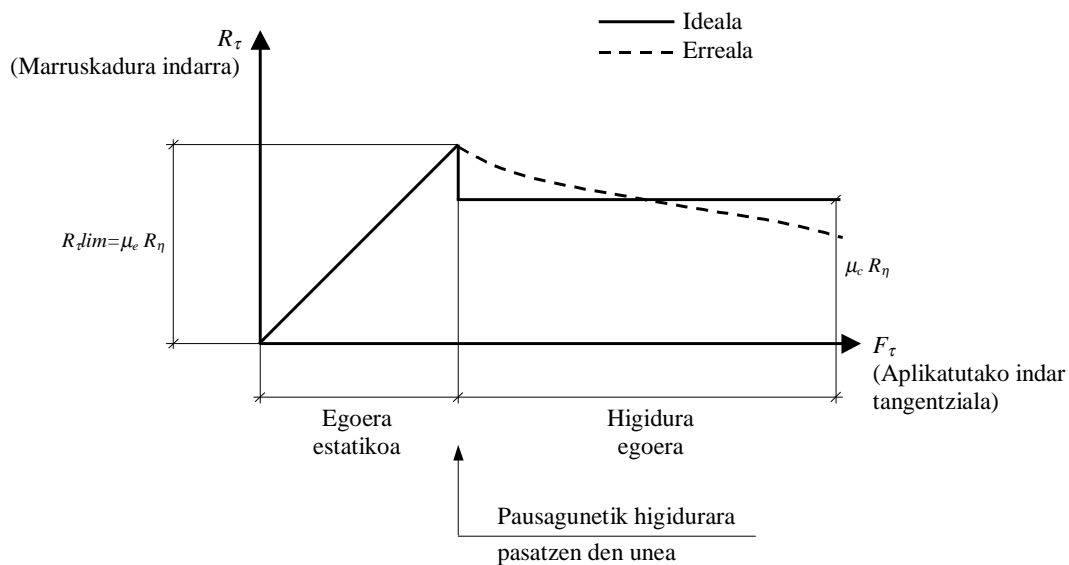


Figura 8: Marruskadura indarra eta aplikatutako indarraren osagai tangenziala erlazionatzen dituen grafikoa.

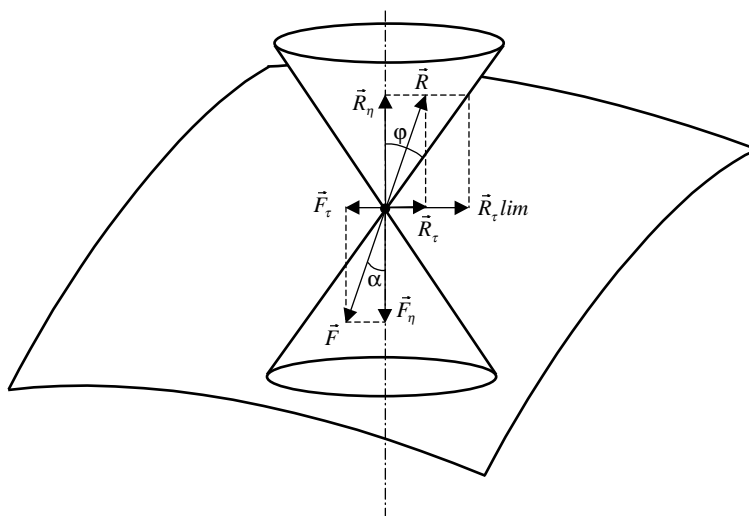


Figura 9: Gainazal zimur batekiko bi aldeko lotura duen puntu materialaren marruskadura konoa.

$$F_\eta = R_\eta \quad \text{eta} \quad F_\tau \leq R_\tau \lim$$

$$R_\tau \lim = R_\eta \tan \varphi \quad \text{denez,} \quad \tan \alpha \leq \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \varphi$$

Emaitza hau honela enuntziatu daiteke:

Gainazal zimur batekin bi aldetako lotura duen puntu batek oreka egoera izango du, aplikatutako indarren erresultanteak norabide normalarekin osatzen duen α angelua, φ angelua baino txikiagoa denean.

Edo beste modu batera esanda; gainazal zimur batekin bi aldetako lotura duen puntu bat orekan mantenduko da, aplikatutako indarren erresultantea marruskadura konoaren barnean dagoenean.

2. Alde bateko lotura:

Kasu honetan aurreko atalean bete behar den baldintzaz gain, aplikatutako indarren erresultanteak gainazalaren aldeko norabidea izan behar du:

$$\vec{F} \cdot \vec{\eta} < 0$$

5.2. LERRO ZIMUR BATI LOTUA DAGOEN PUNTU BATEN OREKA

Lerro honetan, $\vec{\tau}$ bektorearekin definitua dagoen norabide tangenziala, eta bektore honekiko normala den plano definituko dugu.

Aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} ; norabide tangenzialean \vec{F}_τ eta plano normalean \vec{F}_η dituen osagaiekin deskonposatu daiteke.

Era berean, erreakzioko indarra \vec{R} norabide tangenzial eta normalean deskonposatua izan daiteke: \vec{R}_τ eta \vec{R}_η .

Orain \vec{F} indarraren norabidea aldatu egiten bada, hainbat kono osatuko dira, kono hauek era berean beste bat osatzen dutelarik. Honela, higidurarik ez egoteko baldintza, aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} , azken kono honen kanpoan egotea da.

5.3. MARRUSKADURADUN OREKAREN EGONKORTASUNA

Lerro edo gainazal zimur bati lotua dagoen puntu batek oreka mantentzeko bete behar den baldintza:

$$F_\tau \leq R_\tau \lim, \quad \text{edo berdina dena;} \quad F_\tau - R_\tau \lim \leq 0.$$

$F_\tau - R_\tau \lim > 0$ izaten bada, puntu honek higidura izango du, eta bere azelerazioa:

$$a = \frac{F_\tau - R_\tau}{m}$$

Non, m puntu materialaren masa den.

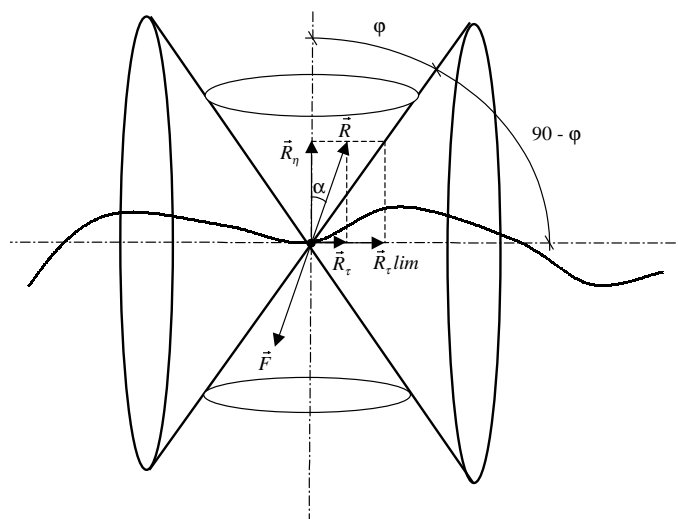


Figura 10: Lerro zimur bati lotuta dagoen puntu materialaren marruskadura konoa.

$$R_{\tau,lim} = \mu_e R_{\eta} = \mu_e F_{\eta} \text{ denez, } F_{\tau} - \mu_e F_{\eta} \leq 0 ; \mu_e F_{\eta} - F_{\tau} \geq 0.$$

Eta adierazpen honetatik puntu material batek orekan duen egonkortasuna neurtzeko erabiltzen den erlazioa erdiesten dugu:

$$\frac{\mu_e F_{\eta} - F_{\tau}}{F_{\eta}} \geq 0$$

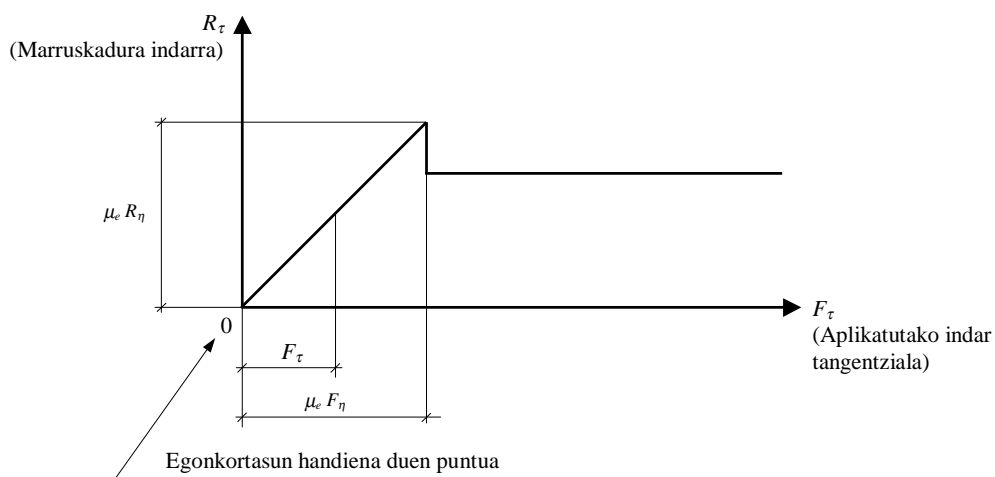


Figura 11: Lotura zimur baten oreka diagrama.

6. SISTEMEN ESTATIKA

6.1. SISTEMA MATERIALEN SAILKAPENA

Sistema bat puntu materialez osatutako konjuntu bat bezala definitzen dugu. Puntu hauek duten loturaren arabera sistema desberdinak definitu daitezke.

Honela, sistema bat osatzen duten puntuen artean, aplikatutako indarrak edozein direla ere, ez bada beraien arteko distantzia aldatzen, sistema *zurruna* dela esaten da. Alderantzizkoa gertatzen bada, sistema *deformagarria* da.

Sistema bat *jarraia* izango da, sistemaren bi edozein punturen artean, beti aurkitu ditza-kegunean sistemakoak diren beste puntu batzuk. Aurkakoa gertatzen bada, sistema *ez jarrai* bat izango da.

Sistema jarrai bat *homogeneoa* izango da, puntu guztiek duten dentsitatea konstante mantentzen denean.

Sistema jarrai bat *isotropoa* da, norabide guztietan ezaugarri berdinak izaten baditu. Alderantzizko kasuan, *anisotropoa* dela esango dugu.

6.2. LOTUREN SAILKAPENA

Hauek dira sistema material batek izan ditzaken lotura motak:

1. Barnekoak:

Barne loturak, sistema materialaren bi punturen higidura erlatiboa mugatzen dutenak dira.

2. Kanpokoak:

Kanpoko loturak, sistemaren higidura askea kanpo erreferentzietatik mugatzen dutenak dira.

3. Zinematikoak

Lotura zinematikoak aplikatutako indarregatik independenteak dira. Adibidez, gidari leun bat. Aldi berean, lotura zinematikoak honela sailkatu daitezke:

- a) Lehenengo mailakoak: Lehenengo mailako lotura zinematikoak dira, denboraren arabera funtzio batekin eta q parametro finitu kopuru batekin espresatu daitezkeenean. Lotura bi aldekoa denean:

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

Bestalde, lotura alde batekoa denean, bi modu hauetan espresatu daiteke:

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \leq 0$$

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \geq 0$$

f_k funtzioek kopuru finitua, jarraiak eta deribagarriak izan behar dute.

q_1, q_2, \dots, q_n parametroei koordenatu orokortuak edo lagrangearrak deitzen zaie. Hauek une konkretu bakoitzean sistemaren konfigurazioa zehazten dutelarik. Lehenengo mailako bi aldetako loturaren adibide bat, r erradioa duen gainazal esferiko batean mugitzera derrigortua dagoen puntuarena izan daiteke.

Hurrengo ekuazioak $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ adierazten du lotura hau, non x, y eta z lehen definitutako q parametroak diren.

Adibide honetan puntuaren kokapena hasiera batean hiru koordenatukin zehaztu daiteke, baina lotura ekuazioa aplikatu ondoren bere kokapena bi parametro ezagutuz finkatzen da.

Bestalde, lehenengo mailako alde bateko loturaren adibide bat, gainazal esferiko baten gainetik mugitzera behartuta dagoen puntu materialaren adibidea izan daiteke. Lotura hau hurrengo ekuazioarekin adierazi daiteke:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2$$

Puntua esferaren gainean dagoenean; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ondorioz kasu honetan ere bere kokapena definitzeko nahikoa izango da bi koordenatu ezagutzearekin. Baina puntua esferatik kanpo dagoenean, bere kokapena definitzeko beharrezkoak izango dira hiru parametroak ezagutzea.

Lotura bat lehenengo mailakoa eta bi aldekoa denean, *holonomia* dela esaten da.

- b) Bigarren mailakoak: Mota honetako ekuazio diferentzialekin definituta daudenak dira:

$$\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{kj} dq_j + \beta_k dt = 0$$

Ekuazio honetako α_{kj} eta β_k parametroak, denboraren eta q parametro lagrangearren funtzioan daude. Ekuazio diferentzial hauek ez dira integratu behar, bestela lehenengo mailako ekuazioetan tranformatzen baitira.

Ikus dezagun mota honetako loturen adibide pare bat:

- 1) Disko batek deslizamendu gabeko errodadura egiten du inklinazio jakin bat duen plano batean, bere ardatza une guztietan irudiko planoarekiko elkarzut mantenduz. Bere kokapena zehazteko plano honetan ibilitako S distantzia eta diskoak duen biraketa angelua θ eman behar dira. Kasu honetan S eta θ izango dira parametro lagrangearrak.

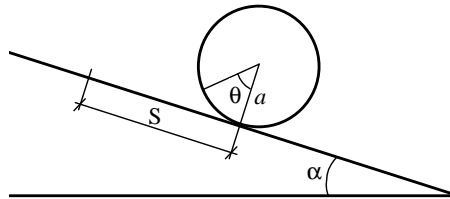


Figura 12: Lotura holonomoen adibide bat.

Errodadura deslizamendu gabekoa izaten bada, hurrengo erlazioa aplikatu daiteke:

$$dS - a \cdot d\theta = 0$$

Ekuazio hau bigarren mailako loturei dagokion bezalakoa da. Hala ere, integratu egin daiteke:

$$S - a \cdot \theta + C = 0$$

Eta kasu honeta lehenengo mailako lotura batean transformatzen da. Hasiera batean diskoaren kokapena definitzeko behar izan ditugun parametroak bi izan dira, eta lotura ekuazio honekin parametro batera murrizten dugu.

- 2) Disko batek deslizamendu gabeko errodadura egiten du plano horizontal baten gainean, diskoa une guztietan plano horizontalarekiko elkarzut egotera derrigortua dago, eta bere ardatz bertikalaren inguruan biratzeko aukera du.

Diskoaren kokapena edozein unetan, hurrengo lau parametroekin definitu daiteke: diskoaren zentro geometrikoaren x eta y osagaiak, diskoaren planoak X ardatzarekin definitzen duen φ angelua eta diskoaren erradio batek, diskoan finkatutako erreferentziako orientazio batekin osatzen duen θ angelua.

Beraz, sistema honek momentuz lau koordenatu behar ditu bere kokapena zehazteko.

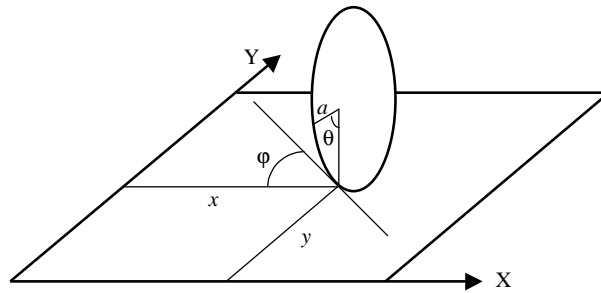


Figura 13: Lotura ez holonomoen adibide bat.

Ikus dezagun lotura honek inposatzen dituen baldintzak zeintzuk diren:

Diskoaren zentroak duen abiadura zeharria zero izan behar denez:

$$\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0$$

Bestalde, diskoaren zentroak duen abiadura kontaktuko puntuarekiko:

$$\dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi = a \dot{\theta}$$

Kasu honetan ezinezkoa da erlazio hauek integratzea, hau da, x, y, φ eta θ parametroen arteko erlazioa kalkulatzeko. Beraz bigarren mailako lotura bat da.

Hau da, lau parametro hauek ez dute beraien artean inongo loturarik gorde beharrik, ondorioz, sistemaren kokapena definitzeko lau parametro definitzen jarraitu beharko dugu.

Laburtzeko esango dugu, bigarren mailako loturak higidurarako baldintzak inposatu egiten dutela baina ez dutela bere kokapena zehazteko behar diren parametroak murrizten.

Higiduraren baldintzak inposatu baina sistemaren kokapena definitzeko behar diren parametroak murrizten ez duten loturei *anolonomoak*, *ez holonomoak* edo *heteronomoak* deitzen zaie. Ikusitakoaren arabera multzo honetan lehenengo mailako alde bateko loturak eta bigarren mailako loturak sartzen dira.

4. Dinamikoak

Lotura dinamikoak, beraien definizioan indarrak eragiten dutenak dira. Adibidez, malguki batekin egindako lotura bat, edo marruskadura duen gidari bat.

5. Denborarekiko menpekoak

Lotura hauetan denboraren funtzioan dauden adierazpenak izango ditugu.

Ikusi dugun bezala, lehengo zein bigarren mailako loturretan denbora eskalarra azaltzen da, nahiz eta bere presentzia ez izan guztiz beharrezkoa.

6. Denborarekiko independenteak

Sistemaren higidura definitzen duten ekuazioetan ez denean denbora azaltzen, edo bigarren mailako loturretan gertatu daitekeen bezala, denboraren arabera dauden parametroak zero direnean.

7. Bi aldetako loturak

8. Alde bateko loturak

9. Marruskadura gabeak edo leunak

10. Marruskaduradunak edo zimurrak

Kasu honetan sistema materialak ditugunez, hurrengo azpisailkapena egin daiteke:

a) Zehazki zimurra

Lotura mota honek, kontaktuan dauden bi gorputzen artean deslizamendu gabeko erroadura ematen dela ziurtatzen du.

b) Soilki zimurra

Kasu honetan, kontaktuan dauden bi gorputzen artean deslizamendua duen erroadura ematen da.

Lotura bat zehazki zimurra edo soilki zimurra izatearen desberdintasuna, eragiten duten indarren eraginpean egon daiteke. Marruskadura duten indarrek, beraz, izaera dinamikoa dute.

11. Lotura soila

12. Lotura bikoitza

13. Lotura hirukoitza

Azken hiru lotura hauek zehazteko, jarraian definitzen den askatasun mailaren kontzeptua definitzea komeni da.

6.3. ASKATASUN MAILA ETA KOORDENATU OROKORRAK

Puntu material baten *askatasun maila* (l), honek izan dezaken higidura posibleen kopurua da.

Puntu material askeak, espazioan izan dezaken higidura posibleak hiru dira, hiru norabide ortogonalei dagokiena. Honela, loturarenbat inposatuz gero, bere askatasun maila jaitsi egiten da.

Honela, plano batean mugitzera behartuta dagoen puntuak bi askatasun maila izango ditu; bi norabide ortogonalei dagokiena, eta lerro batean mugitzera behartuta dagoen puntuak, soilik askatasun maila bat izango du.

Bestalde, N puntu materialekin osatutako sistema materialei dagokienez, hauen askatasun maila $3N - \nu - h$ izango da. Honela, sistema materialak dituen ν lotura holonomoen kopurua izango da eta h lotura ez holonomoen kopurua. Gogoratu behar da lotura holonomo zein ez holonomoak sistema materialak izan dezaken higidura murriztu egiten dutela.

Espazioan dagoen sistema material zurrun edo deformaezinak, 6 askatasun maila ditu; hiru translazio eta hiru biraketa. Solido honi loturak ezartzen bazaizkio askatasun maila jait-si egiten da.

Koordenatu orokorren edo lagrangearren kopurua (μ) konfigurazio jakin bat zehazteko behar diren parametroen kopuru minimoa da.

Puntu material aske baten kokapena, hiru parametroekin definitzen dela ikusi dugu, honetarako; koordenatu cartesiarrak, zilindrikoak, esferikoak,... edo beste edozein erreferentzia sistema erabili daitezke. Honela, bere koordenatu orokorren kopurua hiru da.

Puntu honi loturak ezartzen badiogu, koordenatu orokortuen kopurua murriztu egiten da:

Adibidez, puntu baten higidura plano batean izatera derrigortzen badugu, bere kokapena bi parametroekin finkatu dezakegu (cartesiarrak, polarrak, eta abar), edo lerro baten egotera derrigortzen badugu, bere kokapena soilik parametro batekin finkatu dezakegu (koordenatu kurbilineo batekin).

Bestalde, N puntu materialekin osatuta dagoen sistema materialei dagokionez, hauen konfigurazioa zehazteko behar diren koordenatu orokorren kopurua $3N - \nu$ izango da. Non ν , sistema materialak duen lotura holonomoen kopurua den. Orain ere gogoratu behar dugu, lotura holonomoak sistema materialaren kokapena zehazterako orduan, koordenatu orokorren kopurua murriztu egiten dutela. Aldiz, lotura ez holonomoak, askatasun maila murriztu arren, koordenatu orokorrak ez dute murrizten.

Espazioan dagoen sistema material zurrunak 6 koordenatu orokor behar ditu bere kokapena ondo zehazteko.

Laburtuz:

- Sistema baten askatasun maila:

$$l = 3N - \nu - h$$

- Sistema baten koordenatu orokorren kopurua:

$$\mu = 3N - \nu$$

Aztertzen dugun sistma puntu materiala denean, edo soilik lotura holonomoak izaten baditu; $h = 0$ izango da, eta ondorioz: $l = \mu$.

6.4. LOTURA SOILAK, BIKOITZAK ETA HIRUKOITZAK

6.4.1. LOTURA SOILAK

Solidoari edo sistema materialari askatasun maila bat gutxitzen dioten loturak dira.

Geometria lauen kasuan lotura soil arruntenak biela eta bermapuntu mugikorrek dira:

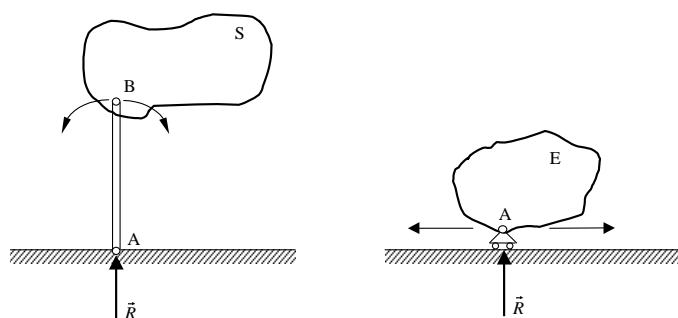


Figura 14: Lotura soilen bi adibide.

Bielaren kasuan, honek lurarekin artikulatzen du A puntuan eta solidoarekin B puntuan. Solidoa aztertzerakoan ikus dezakegu, honen translazioa bielaren norabidean murriztua geratu dela, eta translazioei dagokienez, soilik bielarekiko norabide ortogonalean gauzatu daiteke. Bestalde, solidoak planoan izan dezaken biraketa ez da murriztu. Ondorioz, solidoaren askatasun maila hirutik bira jaitsi da, eta loturan sortuko den erreakzio indarrak bielaren norabidea izango du.

Bermapuntu mugikorrek ere solidoaren askatasun maila hirutik bira jaisten du. Mota honetako loturak bi aldekoak dira, eta ondorioz, loturan sortzen den erreakzio indarra bermapuntu mugikorra dagoen planoarekiko ortogonalala izango da.

6.4.2. LOTURA BIKOITZAK

Solidoari edo sistema materialari bi askatasun maila murrizten dioten loturak dira.

Geometrialauarekin jarraituz, mota honetako loturarik ezagunena bermapuntu finkoa da. Lotura honek, bi solido desberdinetako puntuak lotzen ditu, solido hauek higiduran zein pausagunean egon daitezkelarik.

Artikulazio finkoa duten solidoetan, erreakzio indar bat sortzen da, lotura honek bi translazioak eragozten dituelako, baina ez birakera. Jarraian, erreakzio hau bi norabide nagusietan deskon-

posatu daitekeelarik.

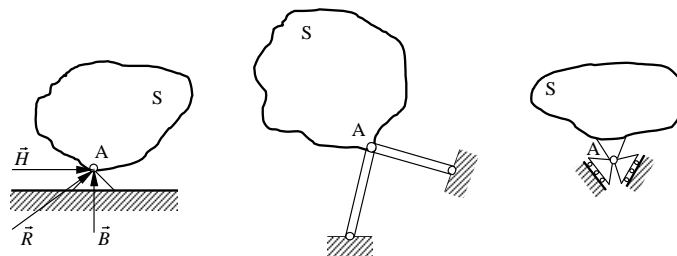


Figura 15: Lotura bikoitzen hiru adibide.

Sistema lauekin jarraituz, artikulazio bat bi biela edo bi artikulazio mugikorrengeatik ordezkatu daiteke, lotura hauek inposatzen duten baldintzak oinarritzat hartuz.

6.4.3. LOTURA HIRUKOITZAK

Solidoari hiru askatasun maila murrizten dioten loturak dira. Sistema lauei dagokionez, hauek duten askatasun maila hiru denez, mota honetako lotura bat ezartzeak, sistema honek izan dezaken edozein higidura eragozteak dakar.

Geometria lauei dagokionez, hiru askatasun maila murrizten duen lotura ezagunena landaketa da. Kasu honetan solidoak izan dezaken biraketa edo desplazamenduak murriztuta geratzen dira.

Honen ondorioz, landaketa batean, planoarekiko ortogonal den momentu bat, eta planoan egon, baina edozein norabide duen erreakzio bat sortzen da. Honek esan nahi du, mota honetako loturek hiru parametro ezezagun sortarazten dutela.

Lotura hirukoitza ere lortu daiteke; lotura soil bat eta bikoitz bat konbinatuz, hiru lotura soil konbinatuz, eta abar. Hiru lotura simple konbinatuz lotura hirukoitza lortu nahi denean, kontuan izan behar da, lotura soiletan sortzen dire erreakzio indarrak ez dutela elkar topakorrak edo paraleloak izan behar, kasu hauetan ez litzatekeelako galeraziko higidura posible guztiak.

6.5. HIGIDURAREN ARABERAKO SISTEMEN SAILKAPENA

1. Sistema material batek higidura izateko aukera duenean, *sistema dinamikoa* dela esaten da.

Honela, lau askatasun maila, hiru askatasun maila,... duten sistema dinamikoetaz hitz egingo dugu.

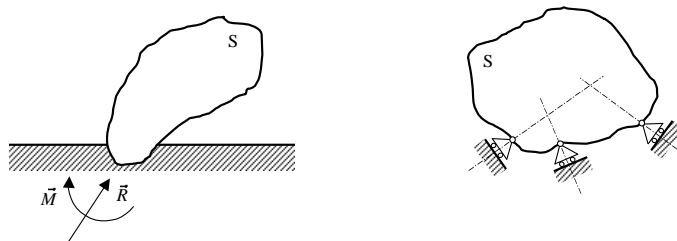


Figura 16: Lotura hirukoitzen bi adibide.

Ikuspuntu teknikitik sistema interesgarrienak askatasun maila bakarra dutenak dira. Hauen loturak, holonomoak eta denborarekiko independenteak izan behar direlarik. Kasu hauetan sistemaren konfigurazioa koordenatu orokor edo lagrangeak bakar-rarekin definitzen da.

2. Sistema material baten askatasun maila zero izaten bada, eta loturek sortzen duten parametro ezezagun edo erreakzioen kopurua, aplikatu daitezken ekuazioen kopuruaren berdina izaten bada, sistema *isostatikoa* edo *estatikoki determinatua* dela esaten da.
3. Aldiz, loturetan sortzen diren erreakzioen kopurua, aplikatu daitezken ekuazioak baino kopuru handiagoa izaten bada, sistema *hiperestatikoa* dela esaten da.

7. BARNE INDARREN TEOREMA

Akzioa eta erreakzioaren arteko berdintasun legearen arabera, A_1 puntuan eragiten duen \vec{F}_{12} indar bakoitzeko, A_1 puntuarekiko eragina duen sistema material bereko A_2 puntuan, modulu eta norabide berdina baina aurkako norantza duen \vec{F}_{21} indarra sortzen da.

Esandakoaren arabera, zera ondorioztatu daiteke:

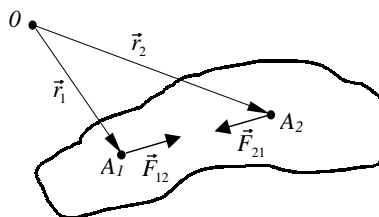


Figura 17: Sistemaren barne puntuetan aplikatutako barne indarrak.

1. Sistema material batean aplikatuta dauden barne indarren batura zero da:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{bai} = \vec{0}$$

2. Sistema material baten barne indarrek edozein puturekiko 0 duten momentu erresultantea zero da:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{bai} = \vec{0}$$

Teorema hau, guk isolatu dezakegun sistemaren edozein zatitan aplikatu dezakegu. Hau egiterakoan kontuan izan behar da, sistema osoa aukeratuz barne indarra zena, kasu honetan sistemaren zati bat aukeratuz, kanpo indarra izatera pasa daitekela.

8. ESTATIKAREN EKUAZIO UNIBERTSALAK

Bedi kanpo indarren eraginpean dagoen sistema materiala. Indar hauek orokorrean bi motatakoak izango dira: aplikatutako indarrak eta erreakzio edo lotura indarrak. Kanpo indar hauei \vec{F}_{kak} nomenklatura aplikatuko diegu, non k parametroa 1 eta n kopuruen artean dagoen zenbaki naturala den, eta n aplikatutako kanpo indarren kopurua.

Sistemaren barnean, barne indarrak sortzen dira, eta hauentzat hurrengo nomenklatura erabiltzen da: \vec{F}_{bak} ; kasu honetan k parametroa 1 eta m kopuruen artean dagon zenbaki naturala da, non m sistemaren barne puntuen kopurua den.

Sistema materiala pausagunean egoteko, beharrezkoa da sistema hau osatzen duten barne puntu guztiak pausagunean egotea. Sistemaren ausazko A_k puntu bat aukeratuz zera bete behar da:

$$\vec{F}_{kak} + \vec{F}_{bak} = \vec{0} \quad \text{edo} \quad \vec{F}_{bak} = -\vec{F}_{kak}$$

Espresio honetan oinarrituz; sistemaren puntu batean aplikatutako kanpo indarren sistemak, eta puntu honek jasaten dituen barne indarrek osatzen duten sistema, aurkako norantza duten sistema berdina osatzen dutela ondorioztatu daiteke.

Jarraian, sistema pausagunean mantendu behar dela kontuan hartuz, eta barne indarren baturak zero izan behar duela:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_{kak} + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{F}_{bak} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{ka} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_{kak} = \vec{0} \quad (1)$$

Bestalde, ausazko O puntu baten momentuak hartzen baditugu, sistema pausagunean egoteko, momentu hauen erresultantea zero izan behar da:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_{kak} + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_{bak} = \vec{0}$$

Eta kontuan izanda barne indarrek sortzen duten momentuen erresultantea zero izan behar dela:

$$\vec{M}_{ka} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_{kak} = \vec{0} \quad (2)$$

Honela, (1) eta (2) ekuazioek estatikaren ekuazio unibertsalak osatzen dute. Ekuazio hauek sistema zurrinak orekan mantentzeko bete behar duten baldintzak finkatzen dute:

- Kanpo indarren erresultanteak zero izan behar du.
- Kanpo indarren momentu erresultanteak zero izan behar du.

Baldintza hauek beharrezkoak dira, baina baliteke sistema deformagarrientzat nahikoak ez izatea. Honela, bi muturretan aurkako indarrak aplikatuta dituen goma zati batek enuntziatu-tako baldintzak bete egiten ditu, baina goma zatia higiduran dago.

Bi baldintza unibertsalak, X , Y eta Z ardatzekin osatutako erreferentzia sisteman proiektatuz, hurrengo baldintza analitikoak erdiesten ditugu:

$$F_{kakx} = \sum_{k=1}^{k=n} F_{kakx} = 0 \quad ; \quad F_{kaky} = \sum_{k=1}^{k=n} F_{kaky} = 0 \quad ; \quad F_{kakz} = \sum_{k=1}^{k=n} F_{kakz} = 0$$

$$M_{kakx} = \sum_{k=1}^{k=n} M_{kakx} = 0 \quad ; \quad M_{kaky} = \sum_{k=1}^{k=n} M_{kaky} = 0 \quad ; \quad M_{kakz} = \sum_{k=1}^{k=n} M_{kakz} = 0$$

Kasu gehienetan, sistemaren oreka finkatzen duten 6 ekuazio analitiko hauek, kopuru txikiago batera murriztu daitezke erreferentzia sistema egokia aukeratuz gero.

Erreakzio edo lotura indarrak, kanpo indarren barnean sailkatzen dira. Orokorrean indar hauek ezezagunak izaten direnez, kasu hauek eman daitezke:

1. Oreka ekuazioen kopurua eta erreakzio edo lotura indarren kopurua berdina izatea. Kasu honetan, ariketa estatikoki determinatua dagoela, edo isostatikoa dela esaten da.
2. Oreka ekuazioen kopurua, erreakzio ezezagunen kopurua baino txikiagoa izatea. Kasu honetan ariketa estatikoki indeterminatua, edo hiperstatikoa dela esaten da.

9. SOLIDO ZURRUNAREN ESTATIKA

Zinematikan, higiduran dagoen gorputz batean, honen barne puntuen arteko distantzia erlatiboa konstante mantentzen bada, gorputz honi solido zurruna deitzen zaio.

Estatikan, gorputz bateko A eta B puntuak aukeratuta, eta puntu hauetan AB norabidea eta aurkako norantza duten bi indar berdinean aplikatuta, gorputz hau orekan mantendu eta AB distantzia konstante mantentzen denean deitzen zaio solido zurruna.

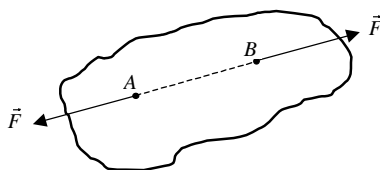


Figura 18: Sistemaren A eta B puntuetan aplikatutako aurkako indarrak.

Solido zurrunaren kontzeptu hau solido errealean aplikatzerakoan, modu idealizatu batean egin behar da. Hau da, aurreko adibidea solido errealean aplikatzerakoan honen barne puntuen arteko distantzia erlatiboa magnitude handiago edo txikiago batean aldatu egingo da, ondorioz, solido errealak ez dira guztiz zurrunak izango. Mekanikan egiten den azterketetan solidoak zurrunak direla suposatzen da, hauek jasaten duten deformazioak mespresagarriak direla suposatzen delako.

Beraz, solido zurrunek zurruntasun absolutua dutela onartuz, mota honetako sistema materialentzat hurrengo baldintzak bete behar dira:

1. Solido zurrun baten oreka ez da aldatzen, sistema honen bi ausazko puntuetan, bi puntuak lotzen dituen akzio lerroaren norabidea eta aurkako norantza duten bi indar berdinean aplikatzen direnean.
2. Oreka oinarritzko sistema baliokidea, norabide berdina duten bi indar kontrajarriekin osatzen da. Sistema hau edozein solido zurrunetan ipini edo kendu ahal izango da honen oreka egoera aldatu gabe.
3. Bedi A_1 puntuan \vec{F} indarra aplikatua duen solido zurruna. \vec{F} indarrarekin lerrotatuta dauden A_2 eta A_3 puntuetan, aurreko atalean definitutako oinarritzko sistema aplikatzen dugu. Kasu honetan indarraren balioa \vec{F} da. Ondorioz, solido zurrunak zuen oreka egoera aldatu gabe geratu da. Jarraian A_1 eta A_3 puntuetan aplikatutako indarrak kendu egin ditzakegu, modulu eta norabide berdina baina aurkako norantza dutelako. Beraz, solido zurrunak orain jasaten duen indar bakarra A_2 puntuan aplikatua dagoena da, eta indar honek osatzen duen sistema, hasierako sistemaren baliokidea da. Ondorioz, solido zurrunetan aplikatutako indarrak bektore labainkorrek dira, eta bektore hauei, aurretik ikusitako teoria guztia aplikatu ahal izango zaie.

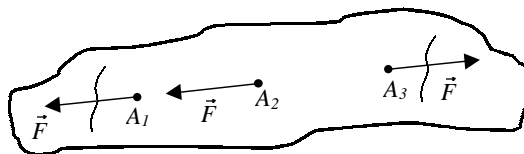


Figura 19: Sistemaren barne puntuetan aplikatutako indarren ordezkapena.

4. Kasu honetan, A_1, A_2, \dots, A_n puntuetan hurrenez hurren, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ indarrak aplikatuta dituen solido zurruna suposatuko dugu. Honela, bektore labainkorrek direnez, beti ordezkatu ahal izango dugu sistema hau baliokidea den beste bektoreen sistema batengatik. Hau da, puntu batean, aurreko sistemak duen erresultante eta momentuen erresultante berdina duen sistema batengatik, efektu mekaniko berdina lortuz.
5. Kontuan izanda solido zurrunetan aplikatuta dauden indarrak bektore labainkorrek direla, eta bektore labainkorren sistema bat zero izateko bete behar duen baldintzak: puntu batean erresultantea eta momentu erresultantea zero, 8. atalean kanpo indarrentzat definitu ditugun oreka baldintzak beharrezkoak eta nahikoak dira.

9.1. LOTURA DUEN SOLIDO ZURRUNAREN AZTERKETA ESTATIKOA

Loturek, normalean guretzat ezezagunak izaten diren erreakzio indarrak eragiten dute.

Aplikaturako indarrak, erreakzio indarrekin batera kanpo indarren sistema osatzen dute, beraz, solido zurrunaren azterketa estatikoa bi puntu hauetan zehaztuko da:

1. Aplikaturako indarrak solidoaren oreka ahalbideratzen duten baieztatzea.
2. Erreakzioko indarrak kalkulatzeko, behar diren elementu ezagunak kalkulatzeko.

Bi puntu hauek, estatikaren ekuazio unibertsalak aplikatuz ebatzen dira.

Kontuan izanda kanpo indarrak \vec{F}_{ka} ; aplikaturako indarra \vec{F} eta erreakzio indarrak \vec{R} osatzen dutela:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{F}_O} + \vec{M}_{\vec{R}_O} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = -\vec{F} \\ \vec{M}_{\vec{R}_O} = -\vec{M}_{\vec{F}_O} \end{cases}$$

Bi ekuazio hauek adierazten digute, solido zurruna orekan mantentzeko, erreakzio indarrek osatzen duten sistema, aplikaturako indarrek osatzen duten sistemaren berdina baina aurkakoa izan behar dela.

9.1.1. PUNTU FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA

Bedi puntu finko bat duen solido zurruna. Puntu finko hau, erreferentzia sistemaren jatorria dela suposatuko dugu. Lotura honek, \vec{i} , \vec{j} eta \vec{k} norabideetako desplazamenduak galeraziko dizkio solido zurrunari, baina posible izango du hiru erreferentzia ardatzekiko biraketak. Honela, errotula esferiko motako lotura bat da, eta ondorioz sistema honek hiru askatasun maila izango ditu.

Lotura honek, aplikatutako indarren eraginagatik 0 puntutik pasatu baina edozein norabide duen \vec{R} erreakzio indar bat sortarazten du, indar hau hiru norabide nagusietan deskonposatu daitekeelarik.

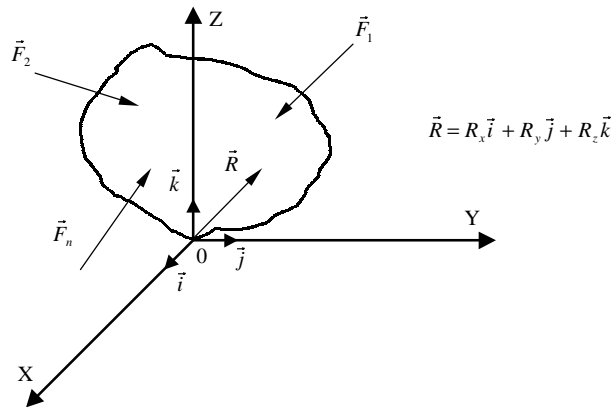


Figura 20: Puntu finkoa duen solido zurruna.

Aplikatutako indarrak $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ izanda, hauen erresultantea:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Jarraian, 0 puntuan momentuak hartuz, aplikatutako indarren momentu erresultantea:

$$\vec{M}_{\vec{F}_0} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

Estatikaren ekuazio unibertsalak aplikatuz:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{F}_0} + \vec{M}_{\vec{R}_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Lehenengo ekuaziotik:

$$R_x + F_x = 0 \quad ; \quad R_y + F_y = 0 \quad ; \quad R_z + F_z = 0$$

Eta bigarren ekuaziotik, kontuan izanda erreakzio indarra 0 puntutik pasatzen dela, eta ondorioz, $\vec{M}_{\vec{R}_0} = \vec{0}$ dela:

$$M_x = 0 \quad ; \quad M_y = 0 \quad ; \quad M_z = 0$$

Lehenengo hiru ekuazioetatuz baliatuz, \vec{R} erreakzio indarra kalkulatu dezakegu, eta beste hiru ekuazioek solido hau orekan mantendu dadin bete behar den baldintza finkatzen dute, hau da, aplikatutako indarrek 0 puntuarekiko sortzen duten momentua zero izan behar dela.

9.1.2. ARDATZ FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA

Kasu hau, bi puntu finko dituen solidoaren kasua da. Bi puntu finko izateagatik, hauek lotzen dituen lerroko puntuak ere finko egongo dira.

Solido honek hiru norabideetako desplazamendua galerazita du, eta baita ere bi norabideetako biraketa, ondorioz, askatasun maila bakarra du.

Solido hau pausagunean mantentzeko, ardatzarekiko biraketa eragin diezaioken indar pareak zero izan behar du.

Ariketa hau analitikoki honela planteatu daiteke:

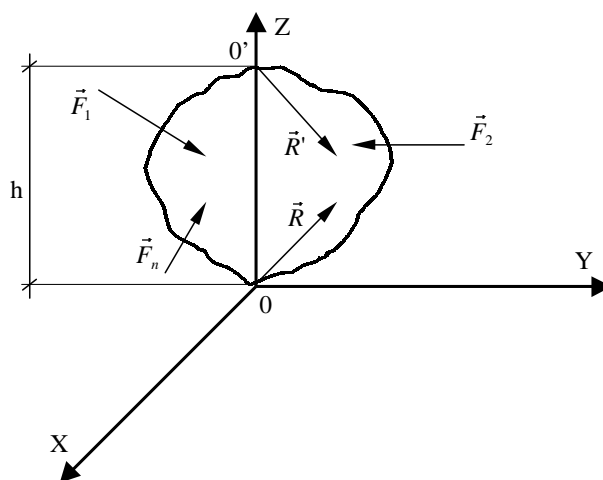


Figura 21: Ardatz finkoa duen solido zurruna.

Solido zurrun honek 0 eta 0' puntuak finkoak dituela suposatzen bada, aplikatutako $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ indarren eraginagatik, puntu hauetan \vec{R} eta \vec{R}' erreakzioak sortuko dira.

Kasu honetan, estatikako ekuazio unibertsalak aplikatuz sortutako ekuazioak:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{R}' + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{R}_0} + \vec{M}_{\vec{R}'_0} + \vec{M}_{\vec{F}_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Bestalde, \vec{R} bektorearen akzio lerroa 0 puntutik pasatzen denez, $\vec{M}_{\vec{R}_0} = \vec{0}$ da. Eta $\vec{M}_{\vec{R}'_0}$ momentuaren balioa kalkulatzeko:

$$\vec{M}_{\vec{R}'_0} = \vec{00}' \wedge \vec{R}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & h \\ \vec{R}'_x & \vec{R}'_y & \vec{R}'_z \end{vmatrix}$$

Odorioz, estatikako ekuazioak honela geratuko dira:

$$\begin{aligned} R_x + R'_x + F_x = 0 & \quad ; & R_y + R'_y + F_y = 0 & \quad ; & R_z + R'_z + F_z = 0 \\ -h R'_y + M_x = 0 & \quad ; & h R'_x + M_y = 0 & \quad ; & M_z = 0 \end{aligned}$$

Azkenengo adierazpenak orekaren baldintza zehazten du, hau da, ardatz finko bat duen solido zurruna orekan egongo da, aplikatutako indarrek ardatz honekiko egiten duten momentua zero denean.

Beste bost ekuazioak loturretan sortzen diren erreakzioak kalkulatzeko erabili ditzakegu, baina kasu honetan 6 parametro ezezagun ditugunez, kasu hiperestatiko bat dugu.

Praktikan, ariketa hau ebatzi ahal izango da, hurrengo baldintzarenbat betetzen denean:

1. Aplikatutako indarren erresultantea Z ardatzarekiko elkarzut denean. Honela, $F_z = 0$ izango da, eta ondorioz $R'_z = R_z = 0$.
2. Solido zurrun honek ardatzean duen loturen arabera, loturako puntu batek ezin ditue-nean indar axialak jasan. Kasu honetan $R_z = 0$ eta $R'_z \neq 0$ izango da, edo $R_z \neq 0$ eta $R'_z = 0$. Edozein kasutan, ariketa hau hiperestatiko izatetik isostatikoa izatera pasatzen da.

9.1.3. PLANO BATEAN BERMATUA DAGOEN SOLIDO ZURRUNA

Atal honetan, solido zurrun bat plano batean hiru modutan bermatu daitekela suposatuko dugu:

1. Plano bateko puntu batean bermatzen den solido zurruna:

Modu honen barnean hurrengo azpisailkapena egin daiteke:

- a) Solido zurruna eta planoaren artean lotura leuna dagoenean:

Kasu honetan, \vec{R} erreakzio indarra planoarekiko ortogonala da, eta ondorioz oreka mantentzeko, aplikatutako indarren erresultanteak \vec{F} ere planoarekiko ortogonala izan behar du.

- b) Solido zurruna eta planoaren artean lotura zimurra dagoenean:

Kasu honetan aldiz, \vec{R} erreakzio indarrak osagai tangentiala izan dezake, baina oreka mantentzeko, ikusi dugun bezala, marruskadura konoaren barnean egon behar du. Lotura alde batekoa izaten bada, aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} kono honen barnean egoteaz gain planoaren aldeko norantza izan behar du.

Edozein dela gure kasua, solido zurrunk planoarekin duen kontaktu puntua erreferentzia sistemaren jatorria dela suposatuko dugu. Honela, estatikaren ekuazio unibert-salak aplikatuz:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{R}_0} + \vec{M}_{\vec{F}_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Kontuan izanda 0 puntuan hartu ditugula momentuak, eta erreakzio indarraren akzio lerroa puntu honetatik pasatzen dela, estatikaren ekuazioak honela geratzen zaizkigu:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{F}_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Lehenengo ekuazioa erreakzio indarra kalkulatzeko erabili dezakegu $\vec{R} = -\vec{F}$, eta bigarren ekuazioak, oreka baldintza zehazten digu. Hau da, aplikatutako indarrek kontaktuko 0 puntuarekiko egiten duten momentua zero izan behar dela.

2. Plano batean lerrokatuta dauden hainbat puntutan bermatzen den solido zurruna:

Suposatu dezagun lerrokatuta dauden puntuak, erreferentzia sistemako X ardatzaren gainean daudela.

Lotura edo bermapuntu hauek marruskadura gabekoak direla suposatzen badugu, eta bermapunturako plano X eta Y ardatzek osatzen dutena, erreakzioei dagokienez; $R_x = 0$, $R_y = 0$, $M_{R_z} = 0$ eta $M_{R_x} = 0$ izango dira.

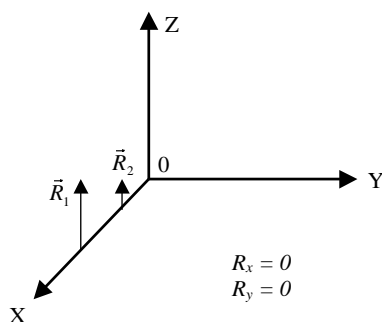


Figura 22: Plano bateko bi puntutan bermatua dagoen solido zurruna.

Estatikako ekuazio unibert-salak aplikatuz:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{R}_0} + \vec{M}_{\vec{F}_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Ekuazio hauek kasu konkretu honetan aplikatuz:

$$F_x = 0 \quad ; \quad F_y = 0 \quad ; \quad R_z + F_z = 0$$

$$M_x = 0 \quad ; \quad M_{R_y} + M_y = 0 \quad ; \quad M_z = 0$$

Ekuazio hauek; $F_x = 0$, $F_y = 0$, $M_x = 0$ eta $M_z = 0$ aplikatutako kanpo indarrek bete behar duten baldintzak zehazten digute, hau da, aplikatutako indarren erresultanteak planoarekiko ortogonalak izan behar du, eta ez du sortu behar momenturik X eta Z ardatzekiko.

Beste bi ekuaziokin, erreakzio ezezagunak kalkulatu ahal izango ditugu, solido zurrunak planoarekin duen bermapuntuen kopurua bi edo bi baino txikiagoa den kasu guztietan. Bermapuntuen kopurua bi baino handiagoa izaten bada, ariketa hiperestatikoa izango da.

3. Plano batean lerrokatuta ez dauden hainbat puntutan bermatzen den solido zurruna:

Bedi, X eta Y ardatzek definitzen duten planoak. Kasu honetan ere, solido zurrunak planoarekin izan behar dituen bermapuntu edo loturak, marruskadura gabekoak direla suposatuko dugu, ondorioz; $R_x = 0$, $R_y = 0$ eta $M_{R_z} = 0$ izango dira.

Orekaren ekuazioak planteatuz:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\vec{R}_O} + \vec{M}_{\vec{F}_O} = \vec{0} \end{cases}$$

Eta gure kasura zehaztuz:

$$F_x = 0 \quad ; \quad F_y = 0 \quad ; \quad R_z + F_z = 0$$

$$M_{R_x} + M_x = 0 \quad ; \quad M_{R_y} + M_y = 0 \quad ; \quad M_z = 0$$

Orain oreka baldintzak lehenengo bi ekuazioekin eta azkenarekin finkatzen dira, hau da, aplikatutako indarren erresultantea planoarekiko normala izan behar da eta aplikatutako indarren planoarekiko ortogonalak den ardatzarekiko sortzen duten momentu erresultantea zero izan behar dela.

Beste hiru ekuazioak, bermapuntuetan sortzen diren erreakzioak kalkulatzeko balio dute. Bermapuntu hauen kopurua hiru baino handiagoa izaten bada, ariketa hau hiperestatikoa izango da.

9.1.4. BI PLANOTAN BERMATUA DAGOEN SOLIDO ZURRUNA

Kasu honetan, solido zurruna eta bi planoen artean dagoen kontaktua marruskadura gabekoa da. Kanpo indarrak paraleloak izan behar dute, erresultante bakarra eman behar dutelarik, eta azkenik, bi erreakzioen akzio lerroak eta aplikatutako indarren erresultantearen akzio lerroa puntu bakarrean moztu behar dira.

Kasu honetan, solido zurrunak planoekin duen kontaktuko puntuetan, planoekiko ortogonalak diren \vec{R}_1 eta \vec{R}_2 erreakzioak sortzen dira.

Aplikatutako indarren erresultantea \vec{F} izaten bada, oreka ekuazioak aplikatuz hurrengo baldintza bete behar da:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{edo}; \quad \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = -\vec{F}$$

Honek esan nahi du, aplikatutako indarren erresultantea, sortutako erreakzio indarrekiko berdina baina kontrajarria izan behar dela, hau da, \vec{R}_1 , \vec{R}_2 eta \vec{F} indarrak planokideak izan behar dutela.

Erreakzioen balioa, hurrengo metodo grafikoa erabiliz kalkulatu daiteke:

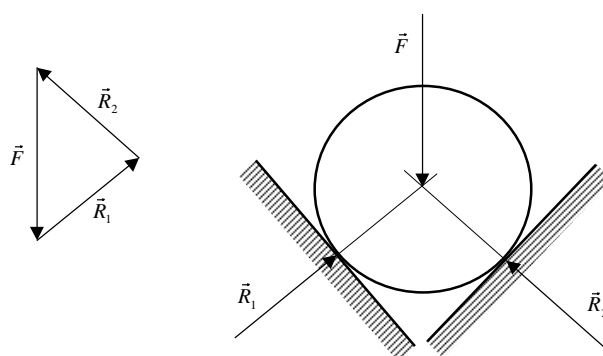


Figura 23: Bi planotan bermatua dagoen solido zurruna.

9.1.5. PLANO BATEAN BERMATU ETA PUNTU FINKO BAT DUEN SOLIDO ZURRUNA

Solido zurrunak planoarekin duen kontaktua marruskadura gabekoa da.

Aplikatutako indarren erresultanteari \vec{F} deitzen diogu. 0 puntu finkoan, printzipioz norabide ezezaguna duen \vec{R}_0 erreakzioa sortzen da, eta solido zurrunak planoarekin duen kontaktuko puntuan, planoarekiko ortogonalak diren \vec{R}_1 erreakzioa sortzen da.

Oreka baldintzak aplikatuz, zera bete behar dela ondorioztatzen da:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_0 + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{edo}; \quad \vec{R}_1 + \vec{R}_0 = -\vec{F}$$

Ikus dezakegun bezala, aurreko atalean lortutako erantzun berdina erdietsi dugu, baina desberdintasun batekin, kasu honetan ez dugu \vec{R}_0 erreakzioaren norabidea ezagutzen. Erreakzio indar honen norabidea ezagutzeko nahikoa izango da \vec{R}_1 eta \vec{F} indarren akzio lerroak mozten diren puntua, 0 puntuarekin elkartzea.

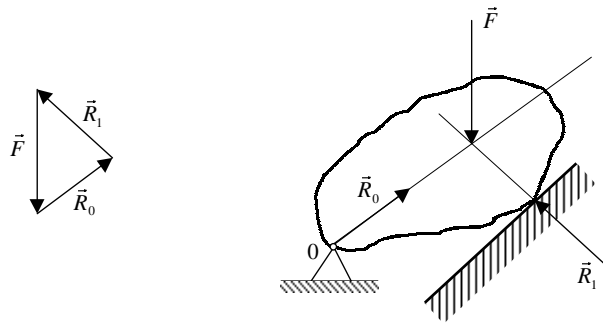


Figura 24: Puntu finkoa izan eta plano batean bermatua dagoen solido zurruna.

10. GRAFOSTATIKA

Solido zurrunetan aplikatutako indarren balioak kalkulatzeko (bektore labainkorak), sistema hauek planoak direnean, metodo grafikoak erabili daitezke. Metodo hauek analitikoak baino azkarragoak dira, nahiz eta laneko tresnen eraginagatik, zehaztasun falta ere izan dezaket. Hala ere, metodo grafikoetatik lortutako zehaztasuna nahikoa izan daiteke ariketa praktikoak ebazterako orduan.

Metodo honen oinarria, bektore elkartopakorren batuketa egiteko, paralelogramoaren legea jarraitzea da.

10.1. POLIGONO FUNIKULARRA ETA INDARREN EDO VARIGNON-EN POLIGONOA

Metodo honen funtsa, bektore planokide eta labainkorren sistema baten ardatz zentrala kalkulatzeko da, hau da, momentu minimoa zero izango duten puntuak. Honela, ardatz zentraleko puntuetan, bektoreen sistema hau bektore erresultanteagatik soilik ordezkaturia izan daiteke.

Bedi solido zurrun batean aplikatuta dauden \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 eta \vec{F}_4 indarrak. Indar hauek ikusi dugun bezala bektore labainkorak bezala hartu ditzakegu.

Metodoaren deskribapena

1. Indarrak errepresentatzeko eskala aukeratu behar da, ondoren bektoreen moduluak eskala honetara egokitzeke.
2. Albo batean egindako irudian indarrak errepresentatzen dira bata bestearen jarraian, honela, "indarren poligonoa" edo "Varignon-en poligonoa" sortzen delarik. Poligonoaren bi muturrek \vec{R} erresultantea definitzen dute.
3. Indarren poligonoaren ondoan, puntu bat aukeratzen da, puntu hau O poloa izango delarik. Honela, a , b , c , d eta e zuzenak marrazten dira, poligonoaren ertzak eta poloa elkartuz.
4. Irudian "poligono funikularra" egiten da, honen aldeak aurreko puntuak aipatutako a , b , c , d eta e zuzenekiko paraleloak direlarik. Honela, poligono funikularrean eta indarren poligonoan indar berdinak, lerro berdinekin egon behar dira kontaktuan.
5. Poligono funikularrean kanpoan geratu diren aldeak luzatu egiten dira (gure kasuan a eta e aldeak). Luzapen hauek puntu batean elkartzen dira. Puntu honetatik indarren poligonoan lortu dugun erresultantearekiko lerro paralelo bat egiten badugu, bektore labainkor eta planokide honen ardatz zentrala lortzen dugu.

Edozein puntutako momentu erresultantea kalkulatu behar bada, nahikoa izango da Varignon-en teorema aplikatzea, kontuan izanda bektore planokideen sistema bat dela.

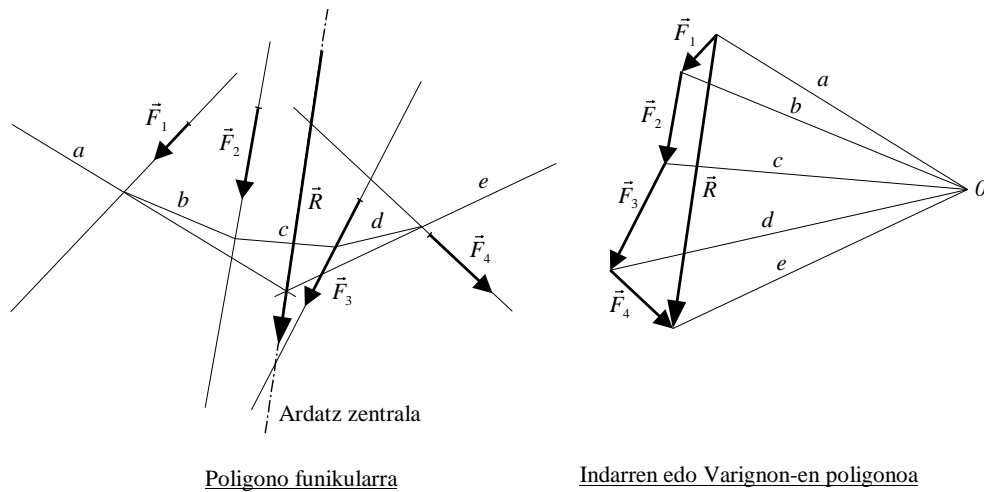


Figura 25: Poligono funikularra eta Indarren edo Varignon-en poligonoa.

Poligono hauek irudikatzerakoan, hurrengo kasu bereziak sortu daitezke:

1. Indarren poligonoa itxia izatea ($\vec{R} = \vec{0}$) eta poligono funikularra irekia izatea, hau da, kanpoan geratu diren aldeak paraleloak izatea. Kasu honetan lerro hauek ez direnez moztzen ezin daiteke kokatu ardatz zentrala. Honek esan nahi du, sistema indar pareen baliokidea dela.
2. Indarren poligonoa itxia izatea ($\vec{R} = \vec{0}$) eta poligono funikularra ere itxia izatea. Honek esan nahi du aplikatutako sistema hutsa dela. Orekan dagoen solido zurrun bati indarren konjuntu hau aplikatuz gero, solido zurruna orekan mantenduko da.

11. BERMAPUNTUETAKO ERREAKZIOEN EDO LOTURA INDARREN KALKULU GRAFIKOA

Bi kasu aztertuko dira:

11.1. INDAR PARALELOEN SISTEMA

Kasu honen adibide praktikoa, bi puntuetan bermatua eta indar bertikalak jasaten dituen habe horizontala da.

Ariketa hau egiteko datuak; \vec{F}_1 , \vec{F}_2 eta \vec{F}_3 indarrak eta bermapuntuen kokapenak dira.

Honela, \vec{E}_1 eta \vec{E}_2 lotura indarrak kalkulatzeko hurrengo pausuak jarraitu behar dira:

1. Aurreko atalean esplikaturako pausuak jarraituz, indarren edo Varignon-en poligonoan marrazten da.

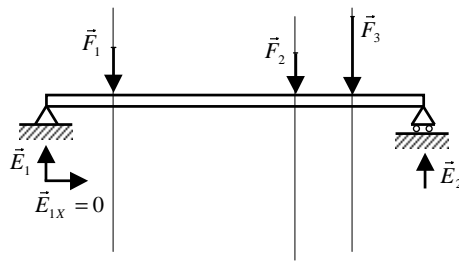


Figura 26: Indar paraleloen sistema.

2. a , b , c eta d aldeekin osatutako poligono funikularra marrazten da, eta poligono hone-tako kanpoko aldeek lotura indarren akzio lerroekin mozten diren puntuak seinalatzen dira.
3. Poligono funikularrean, seinalatutako bi puntu hauek lotzen dira (e lerroa).
4. Indarren poligonoaren polotik e lerroarekiko paralelo bat eginez, \vec{E}_1 eta \vec{E}_2 lotura in-darrak kalkulatzen dira.

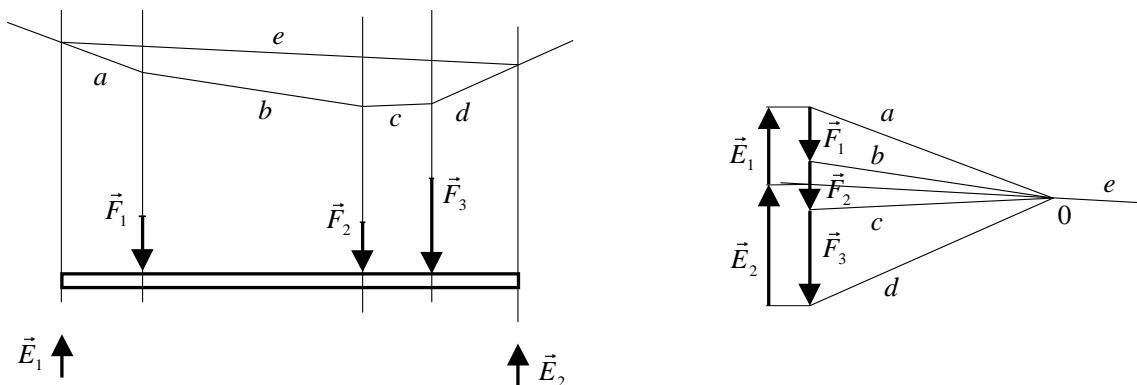


Figura 27: Indar paraleloen sistemaren poligono funikularra eta Indarren edo Varignon-en poligonoa.

11.2. PARALELOAK EZ DIREN LOTURA INDARREN KALKULUA

Plano batean dagoen solido lau bat hartuko dugu adibidetzat, puntu batean artikulazioa duen bermapuntu batekin eta beste puntu batean, kable batekin lotuta, irudiak isladatzen duen bezala. Artikulazioak irudiko planoarekiko ortogonalak den ardatz bat du, eta puntu honetan, norabide ezezaguna duen erreakzio bat sortzen da. Bestalde, kablearekin lotutako puntuan, kablearen norabidea duen lotura indar bat sortuko da. Solido honi, edozein indar sistema aplikatuta, solidoa orekan mantentzeko, honen loturetan sortzen diren erreakzioak kalkulatu

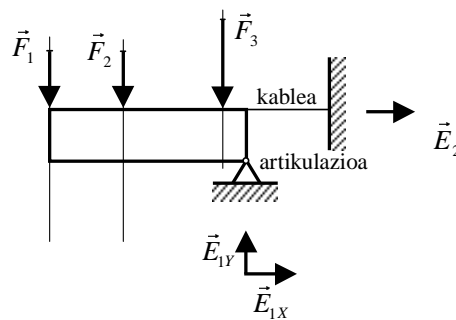


Figura 28: Paraleloak ez diren indarren sistema.

behar dira.

Kalkulu hau egiteko hurrengo pausuak jarraituko dira:

- Indarren poligonoa marraztuko dugu; a , b , c eta d aldeak irudikatuz.
- Jarraian poligono funikularra egiten da. Honetarako, artikulazioan sortzen den lotura indarraren norabidea ez dugunez ezagutzen, poligono funikularra puntu honetatik pasa arazten da. Hau egiteko, d aldearekin hasiko gara.
- Poligono funikularreko kanpo aldeek, lotura indarren akzio lerroekin mozten diren puntuak seinatzen dira. Begi bistakoa da puntu bat, poligono funikularra pasa arazi dugun artikulazio puntua dela. Beste puntua, kablearen eraginagatik sortzen den lotura indarraren akzio lerroa eta a alde mozten diren puntua da. Bi puntu hauek elkartuz, e lerroa marrazten dugu.
- Azkenik, indarren poligonoan e lerroarekiko paraleloa eta honen polotik pasatzen den lerroa irudikatzen da. Jarraian \vec{E}_1 indarraren akzio lerroa luzatu egiten da e lerroa moztu arte. Elkargune honekin, \vec{E}_1 eta \vec{E}_2 lotura indarrak kalkulatu dira.

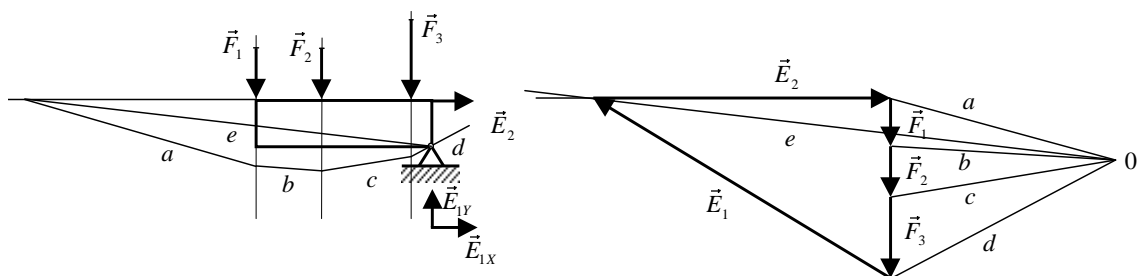


Figura 29: Paraleloak ez diren indarrentzat poligono funikularra eta Indarren edo Varignon-en poligonoa.

11.3. ARDATZ POLARRA EDO CULLMAN-EN LERRO ZUZENA

Bektore sistema planokide eta labainkor batentzat, bi poligono funikular desberdin marrazten dira, honetarako indarren poligonoan O eta O' polo desberdinak erabiltzen direlarik. Honela, poligono funikularrean, alde homologoen bikote bakoitza, lerro zuzen jakin bateko puntuetan moztzen da. Lerro zuzen honi “ardatz polarra” edo “Cullman-en lerro zuzena” deitzen zaio. Gainera, lerro zuzen hau, indarren poligonoan O eta O' poloak elkartzen dituen zuzenarekiko paraleloa da.

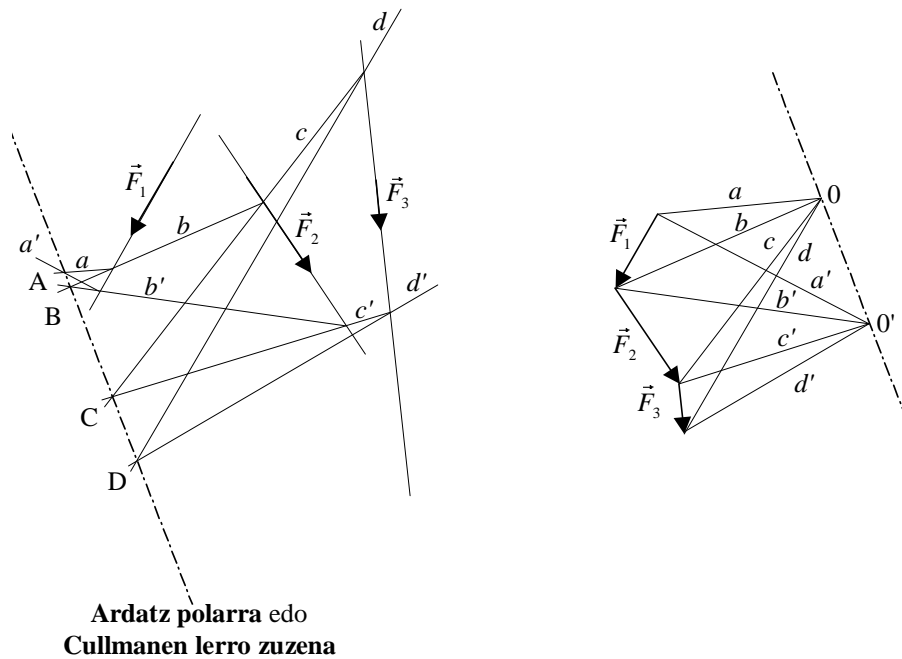


Figura 30: Ardatz polarra edo Cullman-en lerro zuzena.

12. SOLIDO FUNIKULARREN ESTATIKA. DEFINIZIOA

Solido funikularrak definitzeko, kontuan izan behar dugu hurrengo ezaugarriak dituztela; deformagarriak dira, hauen sekzioa mesprezagarria da luzerarekiko eta ez dute zurruntasunik makurdurarekiko. Solido askearen diagrama egiterakoan, elementu honen muturretan ez dira makurdura momentuak azalduko, honela, izango duten indar bakarra, norabide tangenziala duten tentsioak izango dira.

Gainera, solido funikularretan egingo ditugun azterketetan, hurrengo bi hipotesi gehigarri hauek aplikatuko ditugu:

1. Luzatu ezinak dira, hau da, luzera berdina izango dute karga aplikatu aurretik eta karga aplikatu ondoren.
2. Oreka kokapena hartzen dutenean zurrinak bihurtzen direla suposatuko dugu. Hau da, oreka kokapenean kanpo indarrek orain arte enuntziatutako baldintza orokorrak beteko dituzte.

Errealitatean aurkitu daitezken solido funikularrak luzera handia duten kableak dira, adibidez; argi indarraren kableak, trenbidetan dauden kableak, kateak, eta abar.

13. SOLIDO FUNIKULARREN OREKAREN EKUAZIO BEKTORIALA. KASU BEREZIA

Bedi kable batean hartutako PP' elementu diferentziala, honen luzera dS delarik.

Puntu finko bat O hartuko dugu, honela, P eta P' puntuen kokapena zehaztu ahal izango dugu puntu finko honekiko, \vec{r} eta $\vec{r} + d\vec{r}$ kokapen bektoreak erabiliz.

Kableak bere luzera unitearekiko jasaten duen indar osoa \vec{F} izaten bada, PP' elementu diferentzialak jasaten duena, $\vec{F} \cdot dS$ izango da.

Jarraian isolatutako elementu diferentzial honetan estatikako ekuazioak planteatuko ditugu, honetarako kontuan izango dugu baita ere, kablea isolatzerakoan aplikatu behar diren lotura indarrak, kasu honetan lotura indar hauek “tentsioak” direlarik.

Solido funikularraren definizioan aipatu da, hauek jasaten duten tentsioa kableak hartzen duen geometriarekiko tangentea dela. Baldintza honen baieztapen bat izateko xedearekin, printzipioz suposatuko dugu tentsio hauek ez dutela kablearekiko tangenzialak izan beharrik.

Beraz, oreka ekuazioak planteatuz:

1. Indarren batura berdin zero: $\vec{F} \cdot dS + \vec{T} + d\vec{T} - \vec{T} = \vec{0}$

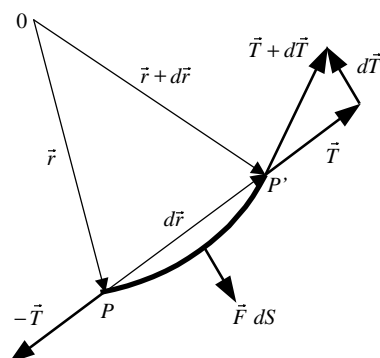


Figura 31: Solido funikular baten elementu diferentzialak jasaten dituen tentsioak.

2. O puntuan hartutako momentuen batura berdina zero:

$$\vec{r} \wedge (\vec{F} \cdot dS - \vec{T}) + (\vec{r} + d\vec{r}) \wedge (\vec{T} + d\vec{T}) = \vec{0}$$

Momentuak aplikatzerakoan $\vec{F} \cdot dS$ indarra P sekzioan aplikatua dagoela suposatzen da, maila goreneko diferentzialak saihesteko.

Bi ekuazio hauek garatuz:

1. $\vec{F} \cdot dS + d\vec{T} = \vec{0}$

Ekuazio honek solido funikularren orekaren ekuazio bektoriala adierazten du.

2. Momentuen batuketa garatzen badugu:

$$\vec{r} \wedge \vec{F} \cdot dS - \vec{r} \wedge \vec{T} + \vec{r} \wedge \vec{T} + \vec{r} \wedge d\vec{T} + d\vec{r} \wedge \vec{T} + d\vec{r} \wedge d\vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{r} \wedge (\vec{F} \cdot dS + d\vec{T}) + d\vec{r} \wedge \vec{T} + d\vec{r} \wedge d\vec{T} = \vec{0}$$

Kontuan izanda $\vec{F} \cdot dS + d\vec{T} = \vec{0}$ dela, eta $d\vec{r} \wedge d\vec{T}$ maila goreneko infinitesimala dela, momentuen ekuazioa honela geratzen zaigu:

$$d\vec{r} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

Ekuazio honek adierazten du; \vec{T} tentsioa eta $d\vec{r}$ diferentziala lerrokideak direla, hau da, bi bektore hauek osatzen duten angelua zero dela. Honek esan nahi du, tentsioa eta kablearen geometria tangenteak direla puntu guztietan. Ondorio honek, aurretik ezagutzen genituen ezaugarriak baieztatu egiten digu.

Kablearen luzera unitatearekiko kargak, \vec{F} indarrak, \vec{u} bektore unitarioarekin definitutako norabide konstantea izango balu, aurreko kasuan erabilitako prozesu analogoa jarraitu dezakegu.

Honela, indarren batura berdina zero egitean lortutako ekuazioaren bi aldeak \vec{u} bektorearekin bektorialki biderkatuz:

$\vec{F} \cdot dS \wedge \vec{u} + d\vec{T} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Kasu honetan $\vec{F} \cdot dS$ eta \vec{u} bektoreak lerrokideak direnez, $\vec{F} \cdot dS \wedge \vec{u} = \vec{0}$ izango da. Ondorioz, $d\vec{T} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ emaitza lortzen dugu.

Honela, \vec{u} bektorea konstantea izanagatik $\vec{T} \wedge d\vec{u} = \vec{0}$ dela ziurtatu dezakegu, beraz lortutako bi emaitza hauek elkartuz:

$$d\vec{T} \wedge \vec{u} + \vec{T} \wedge d\vec{u} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad d(\vec{T} \wedge \vec{u}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{Ktea}.$$

Emaitza honetatik ondorioztatu daiteke \vec{T} tentsioa beti plano batean kokatua dagoela, eta une guztietan \vec{T} tentsioa kablearen geometriarekiko tangentea denez, kablearen oreka kurba plano batean dago, edo beste era batera esanda, laua da.

14. KABLEAREN OREKAREN EKUAZIO CARTESIAR ETA INTRINTSEKOAK

Bedi orain, kableak orekan hartzen duen geometrian, puntu bakoitzean kurbarekiko norabide tangentea definitzen duen $\vec{\tau}$ bektore unitarioa. Puntu bakoitzean tentsioa kablearen geometriarekiko tangentea denez, tentsioaren balioa honela adierazi daiteke:

$$\vec{T} = T \cdot \vec{\tau}$$

Eta oreka ekuazio bektoriala $\vec{F} \cdot dS + d\vec{T} = \vec{0}$, honela espresatu daiteke;

$\vec{F} \cdot dS + d(T \cdot \vec{\tau}) = \vec{0}$, espresio hau garatuz:

$\vec{F} \cdot dS + dT \cdot \vec{\tau} + T \cdot d\vec{\tau} = \vec{0}$, eta azkenik:

$$\vec{F} + \vec{\tau} \frac{dT}{dS} + T \frac{d\vec{\tau}}{dS} = \vec{0}$$

Jarraian, \vec{F} bere osagai intrintsekoen arabera adieraziz:

$\vec{F} = F_\tau \cdot \vec{\tau} + F_\eta \cdot \vec{\eta} + F_b \cdot \vec{b}$ eta kontuan izanda $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{\eta}}{\rho}$ dela, aurreko espresioa triedro intrinsekoaren $\vec{\tau}$, $\vec{\eta}$ eta \vec{b} norabideetan proiektatuz:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dS} + F_\tau = 0 \\ \frac{T}{\rho} + F_\eta = 0 \\ F_b = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ekuazio hauek, kable edo solido funikularraren} \\ \text{oreka ekuazio intrintsekoak dira.} \end{array}$$

Oreka ekuazio cartesiarrak hurrengo ekuaziotik abiatuta kalkulatzen dira:

$$\vec{F} \cdot dS + d(T \cdot \vec{\tau}) = \vec{0}$$

Kotuan izanda, $\vec{\tau}$ bektorearen osagai cartesiarrak hurrengo hauek direla:

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{dS} \vec{i} + \frac{dy}{dS} \vec{j} + \frac{dz}{dS} \vec{k}$$

Eta \vec{F} indarraren osagai cartesiarrak:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Honela, oreka ekuazio cartesiarra hiru ardatz catesiarretan proiektatuz:

$$d \left(T \frac{dx}{dS} \right) + F_x dS = 0 \quad ; \quad d \left(T \frac{dy}{dS} \right) + F_y dS = 0 \quad ; \quad d \left(T \frac{dz}{dS} \right) + F_z dS = 0$$

Eta kontuan izanda \vec{u} unitarioa izateagatik betetzen duen baldintza:

$$\left(\frac{dx}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dS} \right)^2 = 1$$

Lau ekuazio hauek integratuz eta dagokien ingurune baldintzak aplikatuz, oreka kurbaren ekuazioa emango digute.

15. KARGA BERTIKAL JARRAIA JASATEN DUEN KABLEA

Kasu honetan Z ardatzarekiko paraleloa den karga suposatuko dugu. Honek esan nahi du $F_x = 0$ eta $F_y = 0$ izango direla.

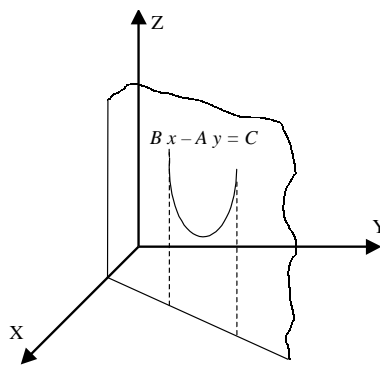


Figura 32: Karga bertikal eta jarraia jasaten duen kablea.

Ondorioz, lehenengo bi ekuazioak:

$$d \left(T \frac{dx}{dS} \right) = 0 \quad \text{eta} \quad d \left(T \frac{dy}{dS} \right) = 0, \quad \text{honek esan nahi du:} \quad T \frac{dx}{dS} = A \quad \text{eta} \quad T \frac{dy}{dS} = B$$

$$\text{Honela: } \frac{A}{dx} = \frac{B}{dy} \quad \Rightarrow \quad B \cdot dx - A \cdot dy = 0 \quad \Rightarrow \quad Bx - Ay = C$$

Emaitza honetan oinarrituz, zera esan dezakegu; kurba hau laua da eta, X eta Y ardatzek osatzen duten planoarekiko ortogonala.

Kurba dagoen planoan ardatz berri batzuk kokatzen baditugu, non kasu honetan Z ardatza Y ardatzarengatik ordezkaturia izango den, oreka ekuazio cartesiarren hirugarren ekuazioa honela geratzen da:

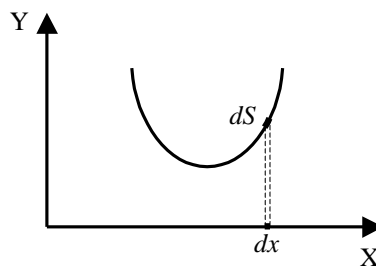


Figura 33: Kurbaren planoan ardatz berrien kokapena.

$$d \left(T \frac{dy}{dS} \right) + F_y dS = 0$$

$$d \left(T \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dS} \right) + F_y dS = 0$$

X ardatz berriarekiko ekuazioa, kontuan izanda $F_x = 0$ dela:

$$d \left(T \frac{dx}{dS} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T \frac{dx}{dS} = T_0$$

Non T_0 tentsioa, X ardatz berriarekiko paraleloa den tentsio da. Tentsio hau, kablearen edozein sekziok X ardatzarekiko paraleloa den osagaia da.

Emaitza hau aurreko espresioan ordezkaturiz hurrengo emaitza lortzen dugu:

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) + F_y dS = 0$$

Suposatu dezagun orain kableak jasaten duen karga ez dagoela honen luzera unitatearekiko emanda, baizik eta absizaren unitatearekiko. Karga hau positiboa izango da, beherako norantza duenean, hau da, Y ardatzaren aurkako norantza duenean.

Praktikan, kableak absizako unitatearekiko jasaten duen karga honen pisu propioa baino askoz handiagoa denean ematen da, adibidez, kablean puntu batetik kablearen pisua baino askoz indar handia egiten duen masa bat zintzilikaturia dagoenean.

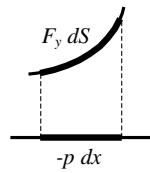


Figura 34: Kableak, absiza unitateko karga jasaten duenean.

Honela, p izendatzen badugu kableak absiza unitatearekiko jasaten duen kargari:

$$F_y \cdot dS = -p \cdot dx$$

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) - p \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) = p \quad \Rightarrow \quad T_0 \frac{d^2y}{dx^2} = p$$

Eta hemendik espresio orokorra lortzen dugu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}$$

16. KARGA BERTIKAL JARRAIA ETA ABSIZAREN UNITATEAREKIKO KONSTANTEA JASATEN DUEN KABLEA

16.1. ALTURA BERTINEAN DAUDEN BERMAPUNTUAK

Kasu honetan, solido funikularrak bi bermapuntuak altura berdinean izateaz gain, absiza unitateko karga bertikal konstante jarraia jasaten du.

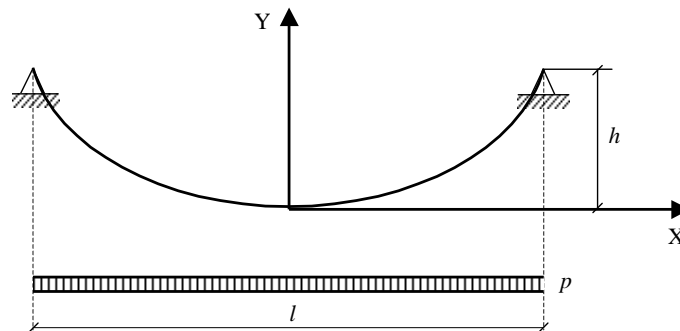


Figura 35: Absiza unitateko karga ktea. eta altura berdinean dauden bermapuntuak.

Honela, aurreko atalean lortutako espresio diferentziala integratu behar dugu, p konstantea dela kontuan izanda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{T_0} \quad \Rightarrow \quad d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{T_0} dx$$

Espresio hau integratuz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{T_0} x + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{p}{T_0} x dx + C_1 dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{T_0} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Jarraian C_1 eta C_2 integrazio konstanteak kalkulatzeko ingurune baldintzak aplikatuko ditugu, kontuan izanda aukeratutako erreferentzia ardatzak eta ezaugarri geometrikoak.

$$x = 0 \text{ denean: } \begin{cases} y = 0 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Honela: } \begin{cases} 0 = \frac{p}{T_0} \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ 0 = \frac{p}{T_0} \cdot 0 + C_1 & \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ondorioz: } y = \frac{p}{T_0} \frac{x^2}{2}$$

Ekuazio analitiko hau parabola bat da. Orain T_0 tentsioaren balioa kalkulaten badugu, hau da, solido funikularreko edozein puntuk X ardatzarekiko duen tentsioaren osagaia, solido funikularren ekuazioa finkatuko duen ekuazioa kalkulatu dugu, honetarako:

$x = \frac{L}{2}$ denean, $y = h$ dela baliatuko dugu:

$$h = \frac{p}{T_0} \frac{L^2}{8} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{p L^2}{8 h}$$

Emaitza hau, kableak duen forma geometrikoa ematen duen ekuazioan ordezkutzen badugu, kableak hartzen duen forma kalkulatu dezakegu, soilik magnitude geometrikoen arabera:

$$y = \frac{p}{T_0} \frac{L^2}{8} \frac{x^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4 h}{L^2} x^2$$

Ikus dezagun zein den kablearen edozein sekziotan sortzen den tentsioa:

$$\begin{aligned} T_0 &= T \cos \theta \\ p x &= T \sin \theta \end{aligned}$$

$$T_0^2 + p^2 x^2 = T^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = T^2$$

$$\text{Beraz: } T = \sqrt{T_0^2 + p^2 x^2}$$

Espresio honetan ikusten da T tentsioaren balioa handitu egiten dela x aldagaia hand-

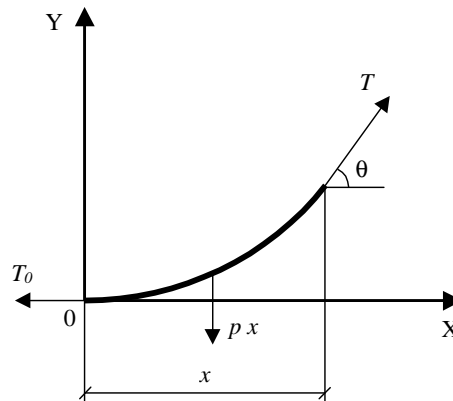


Figura 36: Kableak jasaten duen tentsioa.

itzearekin batera, eta normala den bezala, T tentsioak izango duen balio maximoa kablearen muturretan emango da, hau da; $x \pm \frac{L}{2}$ denean:

$$T_{max} = \sqrt{T_0^2 + \frac{p^2 L^2}{4}}$$

Kablearen edozein sekziotan sortzen den tentsioa kalkulatzeko erabili ditugun bi ekuazioekin, honen tangenteak x aldagaiaren funtzioan duen balioa kalkulatu dezakegu:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{p x}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{p x}{T_0}$$

Erantzun bera erdietsi dezakegu, kableak hartzen duen kurba definitzen duen ekuazio analitikoa deribatuz:

$$y' = \tan \theta = \frac{p x}{T_0}$$

Kablearen luzera S kalkulatzeko, elementu diferentzial bat hartuko dugu:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Gure kasuan $y = \frac{p}{T_0} \frac{x^2}{2}$ denez, eta: $y' = \frac{p x}{T_0}$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{p^2 x^2}{T_0^2}} dx$$

Honela, espresio hau 0 eta $\frac{L}{2}$ mugen artean integratuz, kablearen luzera erdia s kalkulatu dezakegu:

$$s = \int_0^{\frac{L}{2}} \sqrt{1 + \frac{p^2 x^2}{T_0^2}} dx$$

Integral hau egiteko, serien bidez burutuko dugu:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{p x}{T_0}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p x}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p x}{T_0}\right)^4 + \dots$$

$$s = \int_0^{\frac{L}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 x^2}{T_0^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4 x^4}{T_0^4} + \dots\right) dx = L \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2 L^2}{48 T_0^2} - \frac{p^4 L^4}{1280 T_0^4} + \dots\right)$$

Luzera osoa $S = 2 s$ denez:

$$S = L \left(1 + \frac{p^2 L^2}{24 T_0^2} - \frac{p^4 L^4}{640 T_0^4} + \dots\right)$$

$$\text{Bestalde, } \frac{p}{T_0} = \frac{8 h}{L^2} \text{ denez, } S = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{L}\right)^4 + \dots\right]$$

Honela, h altuera, $\frac{L}{4}$ luzera baino txikiagoa denean, kablearen luzera osoa kalkulatzeko inguratze hau erabili daiteke:

$$S = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L}\right)^2\right]$$

16.2. ALTURA DESBERDINEAN DAUDEN BERMAPUNTUAK

Kasu honetan kablea A eta B bermapuntuetan lotuta dago. Bermapuntu hauen artean dagoen altuera diferentzia h da, eta distantzia horizontala l . Orain, kableak jasaten duen banaketa uniformeko karga, \overline{AB} lerroarekiko suposatzen dugu.

Erreferentzia ardatzak aukeratzeko, X ardatza \overline{AB} lerroarekiko paraleloa aukeratu dugu, eta kurba honekiko tangentea O puntutik, puntu hau l bakoaren erdian kokatua dagoelarik. Bestalde, Y ardatza, O puntutik pasatu eta norabide bertikala duena da.

Ekuazio diferentziala aplikatuz:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}$$

Bermapuntuak altuera berdinean dituen kasuan aplikatu ditugun ingurune baldintza berdina aplikatuz, emaitza berdina lortzen dugu:

$$y = \frac{p}{T_0} \frac{x^2}{2}$$

Azpirarratu beharra dago, nahiz eta ekuazio honen itxura, aurreko emaitzaren berdina izan, kasu honetan ekuazio hau ortogonalak ez diren ardatz batzuetan oinarrituta dagoela.

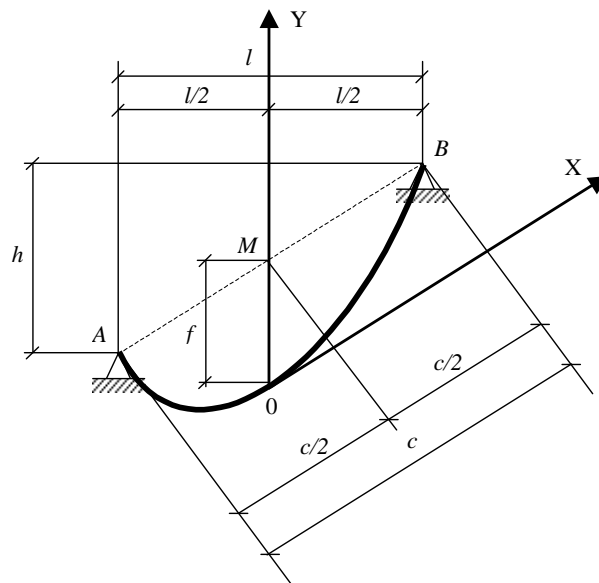


Figura 37: Absiza unitateko karga ktea. eta altura desberdinean dauden berrapuntuak.

T_0 kableak 0 puntuan duen tentsioa da, kasu honetan erreferentzia sistemaren jatorrian duen tentsioa, eta p , solido funikularrak \overline{AB} lerroarekiko jasaten duen banaketa uniformeko karga.

Kableak, sekzio desberdinetan jasaten duen tentsioa kalkulatzeko:

- 0 puntuak jasaten duen T_0 tentsioa:

Aukeratu dugun erreferentzia sisteman B puntuaren koordenatuak:

$$x = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{2}$$

$$y = f$$

Balio hauek, kurbaren ekuazioan ordezkatzuz:

$$f = \frac{p}{T_0} \frac{h^2 + l^2}{2 \cdot 4} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{p(h^2 + l^2)}{8 \cdot f}$$

- A eta B muturrek jasaten duten tentsioa:

Solido funikularra, bere oreka kokapenean zurruna dela suposatuz zera ondorioztatu dezakegu:

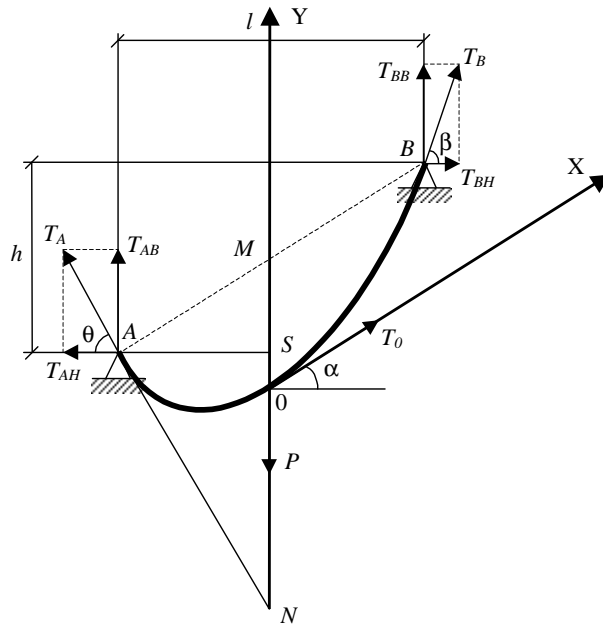


Figura 38: A eta B puntuetan sortzen den tentsioa, T_{AB} tentsioak gorako norantza duenean.

$$T_{AH} = T_{BH}$$

Jarraian, A eta 0 sekzioen artean dagoen kable zatia isolatuz:

$$T_{AH} = T_0 \cos \alpha = \frac{p(h^2 + l^2)}{8 \cdot f} \cdot \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} = \frac{p \cdot l}{8 \cdot f} \cdot \sqrt{h^2 + l^2}$$

$$\text{Ondorioz: } T_{AH} = T_{BH} = \frac{p \cdot l}{8 \cdot f} \cdot \sqrt{h^2 + l^2}$$

T_{AB} eta T_{BB} tentsio bertikalei dagokienez, hurrengo bi kasu desberdinak kontuan hartu ditzakegu:

1. T_{AB} tentsioak gorako norantza izatea:

Kasu honetan:

$$\tan \theta = \frac{\overline{NS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{MN} - \overline{MS}}{\overline{AS}} = \frac{2f - h/2}{l/2} = \frac{4f - h}{l}$$

Emaitza honetan ikusten dugunez; $4f > h$ da.

$$T_{AB} = T_{AH} \cdot \tan \theta$$

$$T_{AB} = T_{AH} \cdot \tan \theta = \frac{p \cdot l}{8 \cdot f} \cdot \sqrt{h^2 + l^2} \cdot \frac{(h - 4f)}{l} = \frac{p(h - 4f)\sqrt{h^2 + l^2}}{8f}$$

$$T_{BB} = T_{AB} + p$$

Eta β angeluari dagokionez, aurrekoaren berdina da:

$$\tan \beta = \frac{4f + h}{l}$$

Kablearen luzera kalkulatzeko orduan ere, bi kasu hauek bereizten dira:

1. $4f > h$ denean:

$$S = L + \frac{h^2}{2L} + \frac{8}{3} \frac{f^2 L}{L+h}$$

2. $h > 4f$ denean:

$$S = L + \frac{h^2}{2L} + \frac{8}{3} \frac{f^2}{L}$$

17. KARGA BERTIKAL JARRAIA ETA KABLEAREN LUZERAREKIKO KONSTANTEA JASATEN DUEN KABLEA

Gogoratu dezagun, karga bertikal jarraia jasaten duen kasuan ondorioztatutako ekuazioa:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}$$

Espresio honetan dagoen “p” parametroa, absiza unitatearekiko karga da. Orain, karga kablearen luzerarekiko denez “q”, hurrengo aldaketa egin behar dugu aurreko espresioa kasu honetan baliagarria izan dadin. Honen adibidea, kablearen pisu propioa izan daiteke.

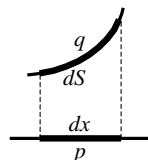


Figura 40: Kableak jasaten duen indarra bere luzera unitatearekiko denean.

$$q \cdot ds = p \cdot dx \quad \Rightarrow \quad p = q \cdot \frac{ds}{dx}$$

Azkenik, $\frac{T_0}{q} = \alpha$ eginez:

$$y = \alpha \cosh \frac{x}{\alpha}$$

Kasu honetan solido funikularrak ekuazio honek zehazten duen forma hartzen du. Forma hau kosinu hiperboliko bati dagokiona da eta katenaria deitzen zaio.

Bestalde, emaitza hau erabiliz, eta kontuan izanda kurba honen edozein puntuk duen malda puntu horretan espresio orokorraren deribatuarekin kalkulatu daitekeela:

$$\tan \theta = y' = \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{1}{\alpha} \sinh \frac{x}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh \frac{x}{\alpha}$$

Katenaria baten arkuak duen luzera

Katenariaren 0 puntua, eta x absiza duen puntuaren artean dagoen arkuaren luzera:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{\alpha}} dx = \int_0^x \cosh x \alpha dx = \alpha \sinh \frac{x}{\alpha}$$

17.1. ALTUERA BERTINEAN DAUDEN BI PUNTUREN ARTEKO KATENARIA

Puntu hauen arteko distantzia l da, eta katenariaren gezia f .

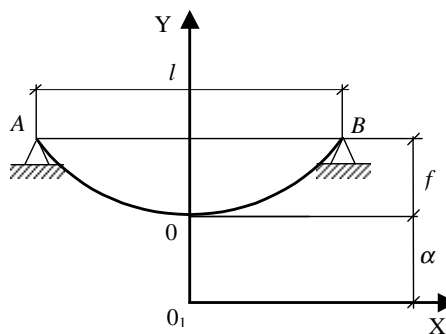


Figura 43: Bermapuntuak altuera berdinean dituen katenaria.

1. l eta f parametroak ezagunak direla suposatuko dugu.

Katenariaren ekuazioa:

$$y = \alpha \cosh \frac{x}{\alpha}$$

Irudian ikus daitekeen bezala, B puntua katenariakoa da, eta bere koordenatuak hurrengo hauek dira:

$$x_B = \frac{l}{2} \quad ; \quad y_B = \alpha + f$$

$$\alpha + f = \alpha \cosh \frac{l}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha + f}{\alpha} = \cosh \frac{l}{2\alpha}$$

Hurrengo izendapenak eginez: $\beta = \frac{l}{2\alpha}$, ondorioz; $\alpha = \frac{l}{2\beta}$:

$$\frac{\frac{l}{2\beta} + f}{\frac{l}{2\beta}} = \cosh \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{l + 2\beta f}{l} = \cosh \beta \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{2\beta f}{l} = \cosh \beta$$

Azkenik:

$$\frac{2f}{l} \beta = \cosh \beta - 1$$

Ekuazio honetan gutxi gora-beherako kalkulua erabiliz β kalkulatu da, ondoren aplikatu ditugun ekuazioak erabilita α kalkulatu dugu katenariaren ekuazioa lortzeko.

- Bestalde, l eta f ezagutu beharrean, l eta S_T (katenariaren luzera osoa) ezagutzen baditugu:

0 puntua eta x absiza duen puntuaren artean dagoen katenariaren luzera, aurretik ondorioztatu dugu $s = \alpha \sinh \frac{x}{\alpha}$ dela, ondorioz katenariaren luzera osoa:

$$S_T = 2\alpha \sinh \frac{l}{2\alpha}$$

Lehen erabilitako izendapena aplikatuz; $\beta = \frac{l}{2\alpha}$, eta $\alpha = \frac{l}{2\beta}$:

$$\frac{S_T}{2\alpha} = \sinh \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2\alpha} \frac{S_T}{l} = \sinh \beta$$

Eta hemendik:

$$\frac{S_T}{l} \beta = \sinh \beta$$

Kasu honetan ere, β parametroa gutxi gora-beherako kalkulua eginez lortuko dugu, ondoren α kalkulatu katenariaren ekuazio ezagutzeko.

Tentsioa

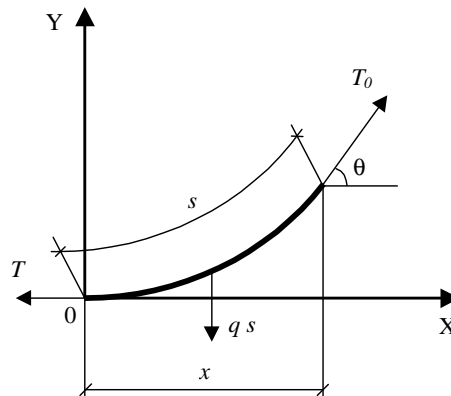


Figura 44: Katenaria bateko edozein sekziok jasaten duen tentsioa.

Katenariaren edozein puntuk jasaten duen tentsioa kalkulatzeko, honen zati bat isolatzen dugu, jadanik ondorioztatu ditugun ekuazioak aplikatzeko:

$$T \cos \theta = T_0$$

$$T \sin \theta = q s$$

$$T^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = T_0^2 + q^2 s^2 = T^2$$

Kasu honetan tentsioaren balioa: $T = \sqrt{T_0^2 + q^2 s^2}$

Katenariaren luzera kalkulatzeko ekuaziotik abiatuta:

$$s = \alpha \sinh \frac{x}{\alpha} = \frac{T_0}{q} \sinh \frac{q}{T_0} x \Rightarrow q s = T_0 \sinh \frac{x}{\alpha} \Rightarrow q^2 s^2 = T_0^2 \sinh^2 \frac{x}{\alpha}$$

Adierazpen hau tentsioaren ekuazioan ordezkatzuz:

$$T = \sqrt{T_0^2 + T_0^2 \sinh^2 \frac{x}{\alpha}} = T_0 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{\alpha}} = T_0 \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{\alpha}} = T_0 \cosh \frac{x}{\alpha}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$T = \frac{T_0}{q} q \cosh \frac{x}{\alpha} = q \alpha \cosh \frac{x}{\alpha} = y q$$

Ondorioz:

$$T = q \cdot y$$

Emaitza honetan oinarrituz esan dezakegu, kable batek puntu batean duen tentsioa, puntu honen ordenatua duen luzerako kablea hartuta, bere pisuaren berdina dela.

17.2. ALTUERA DESBERDINEAN DAUDEN BI PUNTUREN ARTEKO KATENARIA

Kasu honetan datuak izango dira; loturako bi puntuen artean dagoen argia l , hauen artean dagoen distantzia bertikala h eta kablearen luzera osoa S_T .

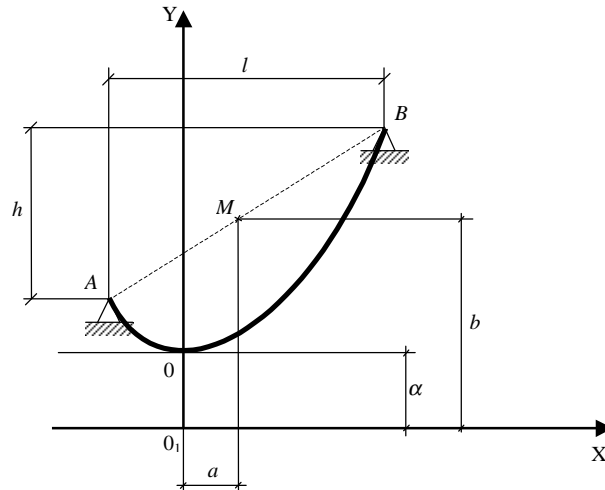


Figura 45: Bermapuntuak altuera desberdinean dituen katenaria.

Ariketa mota hauek ebazteko, gutxi gora-beherako kalkulua erabiliz lortu behar da β -ren balioa hurrengo ekuazioarekin:

$$\frac{\sqrt{S_T^2 - h^2}}{l} \beta = \sinh \beta$$

Ondoren, $\alpha = \frac{l}{2\beta}$ erlazioa erabiliz, α kalkulatu dugu, azkenik katenariaren ekuazioa finkatzeko:

$$y = \alpha \cosh \frac{x}{\alpha}$$

Erreferentzia sistema irudian isladatzen bezala aukeratuta egongo da, non \overline{AB} lerroaren erdiko puntuaren M koordinatuak:

$$b = \frac{S_T}{2} \coth \beta \quad ; \quad a = \alpha \arg \left(\tanh \frac{h}{S_T} \right)$$

Tentsioak kalkulatzeko aurreko atalean kalkulatuak espresioak erabili daitezke:

$$T_A = q \cdot y_A = q \cdot \left(b - \frac{h}{2} \right) \quad \text{eta} \quad T_B = q \cdot y_B = q \cdot \left(b + \frac{h}{2} \right)$$

18. LAN BIRTUALEEN PRINTZIOA

Bedi orekan dagoen n partikula materialekin osatutako sistema.

Partikula bakoitzaren orekak exigitzen duen bezala, partikula bakoitzean aplikatutako indarren erresultanteak zero izan behar du, beraz:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_1 = \vec{0} \\ \vec{F}_2 = \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{F}_n = \vec{0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \text{ eskalarraren balioa } 1 \text{ eta } n \text{ artean dago,} \\ \text{non "n" partikulen kopuru osoa den.} \end{array}$$

Kontuan hartuz partikula bakoitzean eragiten duten indarrak sistemarekiko kanpokoak \vec{F}_{ik} eta barnekoak \vec{R}_i direla:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{1k} + \vec{R}_1 = \vec{0} \\ \vec{F}_{2k} + \vec{R}_2 = \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{F}_{ik} + \vec{R}_i = \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{F}_{nk} + \vec{R}_n = \vec{0} \end{array} \right\} (i=1,2,\dots,n)$$

Orain partikula bakoitzarentzat desplazamendu birtual bat suposatzen badugu, $\delta\vec{r}_i$, non desplazamendu hau ausazkoa den baina sistemak duen loturekiko koherentea, eta $\delta\vec{r}_i$ bakoitza, partikula bakoitzari eragiten dion indarrarekin eskalarki biderkatzen badugu, partikula bakoitzaren lan birtuala erdietsiko dugu:

$$\delta W_i = (\vec{F}_{ik} + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i$$

Lan birtual honek orokorrean edozein balio har dezake, baina sistema orekan dagoen kasu konkretuarentzat bere balioa zero izango da, lehenengo faktorea zero delako:

$$\delta W_i = \vec{F}_{ik} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Sistema honek dituen lotura guztiak idealak izaten badira, hau da marruskadura gabekoak, lotura indarrak duten norabidea loturekiko ortogonalak izango da, eta $\delta\vec{r}_i$ desplazamenduak loturekiko koherenteak izan behar dutenez, \vec{R}_i bektoreekiko ortogonalak izan beharko dute, ondorioz; $\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

Ondorioz, sistema osatzen duten partikula guztien lan birtualak gehituz:

$$\delta W_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ik} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Sistemaren oreka finkatzen duen ekuazio honi, lan birtualen printzipioa deitzen zaio.

Ekuazioan fijatuz gero, bere garapenean agertuko diren batugaiak eta kanpo indarrak kopuru berdinean daude, eta $\delta\vec{r}_i$ desplazamenduak, loturek ahalbideratzen dutenak izango dira.

Jarraian, ekuazio hau koordeneatu orokortuetan espresatuko dugu.

\vec{F}_i kanpo indar baten espresio analitikoa honela errepresentatu ahal izango dugu:

$$\vec{F}_i = F_{x_i} \vec{i} + F_{y_i} \vec{j} + F_{z_i} \vec{k}$$

Eta, $\delta\vec{r}_i$ desplazamendu birtualen espresioa:

$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k}$$

Ondorioz, lan birtualen espresioak forma hau hartuko du:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{i=n} [F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i] = 0$$

Sistema honek dituen lotura guztiak holonomoak direla suposatzen badugu, sistemaren askatasun maila eta honen kokapena finkatzen duten koordenatu orokortuen edo parametro lagrangearren kopurua berdina izango da. Lehendik aplikatutako anotazioarekin jarraituz, bedi μ parametro lagrangearren kopurua eta k parametro hauetako ausazko bat, non k parametroa 1 eta μ artean egongo den.

Sistemaren puntu guztiek duten 3 koordenatu cartesiarrak, eta μ parametro lagrangearrak hurrengo ekuazioen bidez erlazionatzen dira:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_\mu, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_\mu, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_\mu, t) \end{aligned} \right\} \text{ i parametroa 1 eta n balioen artean dago}$$

Hartu dezagun sistema hau une jakin batean. Sistemaren kokapena definitzen duten koordenatu hauek datu jakin batzuk izango dituzte.

Denbora finko mantenduz, koordenatu orokortuentzat desplazamendu birtualak hartu ditzakegu, beti ere loturekin konpatibeak izanda.

Aurreko ekuazioak denbora konstante mantenduz diferentziatu egiten baditugu, cartesiarretan espresatutako desplazamendu birtualak eta parametro lagrangearren arteko erlazioa kalkulatu dugu:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \delta q_\mu = \sum_{k=1}^{k=\mu} L_{ik} \delta q_k \quad \text{Non;} \quad L_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{k=\mu} M_{ik} \delta q_k \quad \text{Non;} \quad M_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{k=\mu} N_{ik} \delta q_k \quad \text{Non;} \quad N_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

Balio hauek, lan birtualak cartesiarretan adierazita dauden espresioetan ordezkatzuz:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{i=n} \left[F_{x_i} \sum_{k=1}^{k=\mu} L_{ik} \delta q_k + F_{y_i} \sum_{k=1}^{k=\mu} M_{ik} \delta q_k + F_{z_i} \sum_{k=1}^{k=\mu} N_{ik} \delta q_k \right] = 0$$

Bestalde, q_k koordenatu orokorrari lotua dagoen indarrari Q_k izendapena jartzen badiogu, non indar honen espresioa hurrengo den:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} (F_{x_i} L_{ik} + F_{y_i} M_{ik} + F_{z_i} N_{ik})$$

Ondorioz, lan birtualen ekuazioa honela geratuko zaigu:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{k=\mu} Q_k \delta q_k = 0$$

Espresio hau, lan birtualen espresioa da koordenatu orokor edo lagrangearretan.

Sistemaren konfigurazioa definitzeko behar diren μ parametro lagrangearrak guztiz beharrezkoak direnak soilik badira, eta sistemak soilik lotura holonomoak izaten baditu, δq_k parametroak beraien artean independenteak dira, ondorioz:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \vdots \\ Q_k = 0 \\ \vdots \\ Q_\mu = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{k eskalarraren balioa 1 eta } \mu \text{ artean dago,} \\ \text{non "}\mu\text{" parametro lagrangearren kopurua den.} \end{array}$$

Honek, μ ekuazio, μ parametro ezezagunekin (q_k parametro lagrangearrak) osatutako sistema bat errepresentatzen du. Ekuazio hauek askatuz, sistemaren oreka kokapena zehazten da.

Aipatu behar da prozedura honetan \vec{R}_i lotura indarrak desagertu egin direla, arrazoi honengatik metodo hau erabiliz ezingo dugu lotura indarrak kalkulatu.